

台風セミナー2019
京都大学防災研究所
2019/04/15

軸対称的な台風の物理学

伊藤耕介 (琉球大学)

謝辞：資料作成にあたり、宮本佳明様、筆保弘徳様、中野満寿男様、山口宗彦様、山田広幸様、辻野智紀様にお世話になりました。感謝致します。

台風の特徴

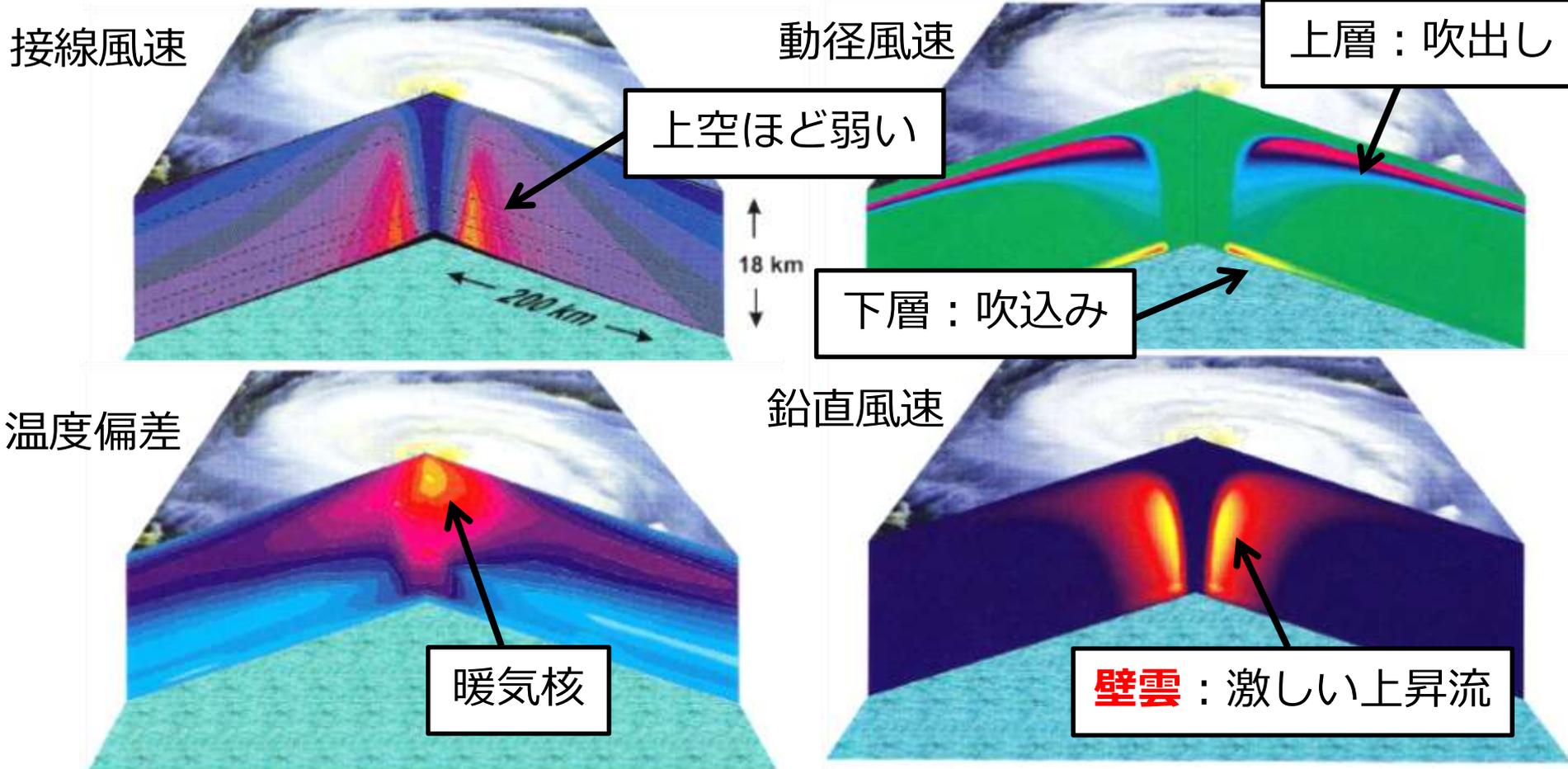
- 伊藤の考え：台風は「**三二気象学**」である
 - 研究テーマのスペクトルがとにかく広い。
進路・強度・発生・降水・構造・サイズ、
力学＋熱力学＋放射、乱流～ENSO、
大気海洋陸面相互作用、
理論・観測・数値実験・予測・防災
 - 地球規模の大気場と同様に、台風の中の構造として「傾圧性」や「ロスビー波」が存在している。
- 非断熱加熱に駆動され、内部コア領域で力学と熱力学が協調的に役割を果たすシステム
- 傾度風平衡・静水圧平衡の近傍にある
 - **物理場の構造や拳動はバランス力学に基づく力学的な解釈が可能(GFD的に楽しい！)**

今日のチュートリアルの内容

- PART 1: 軸対称的な渦の構造
- PART 2: WISHEメカニズム

軸対称的な台風の力学的・熱学的構造

Hurricane Fran(1999)の航空機+衛星観測のコンポジット解析

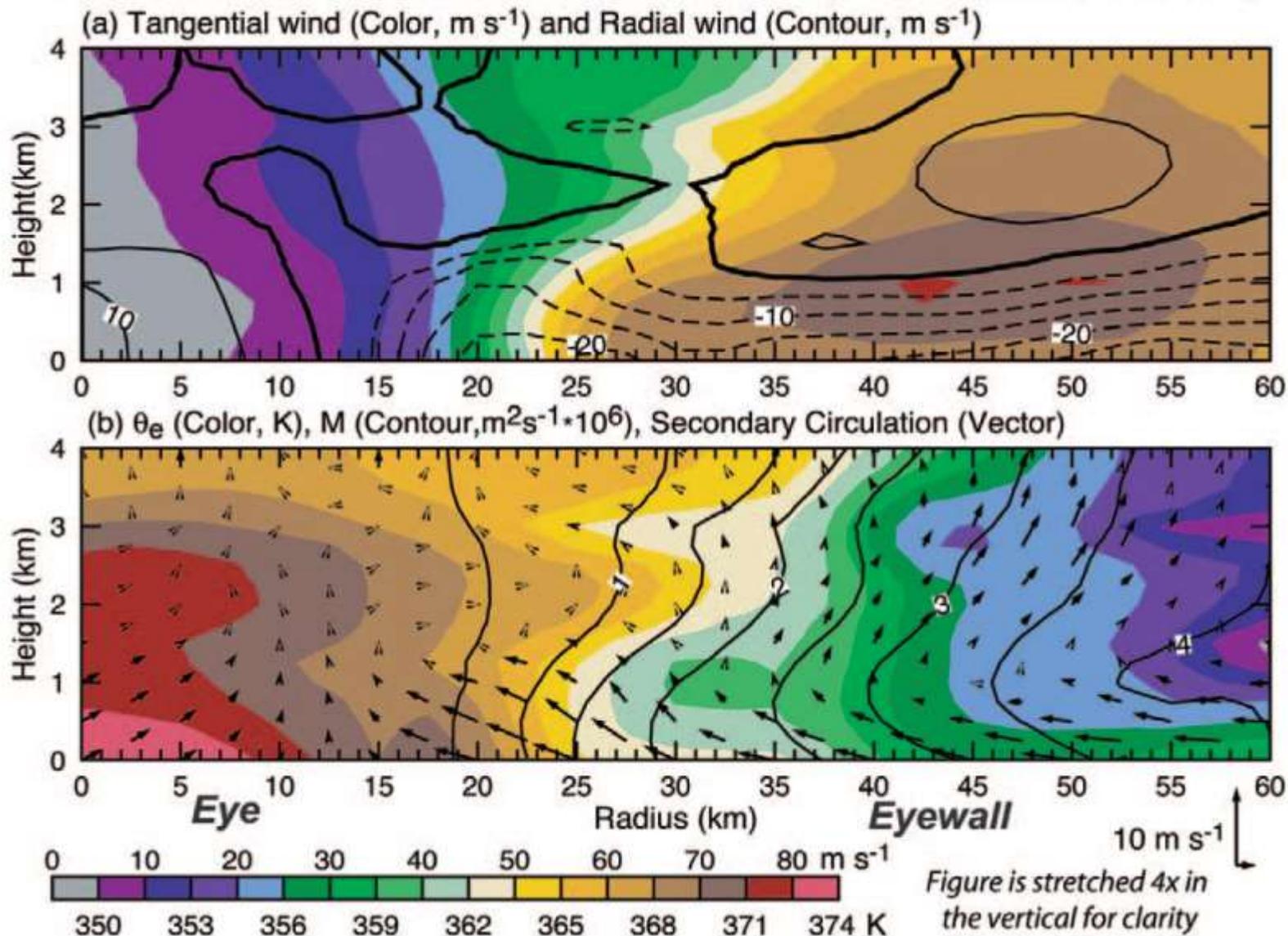


一次循環：接線風速が形成する循環

二次循環：動径風速と鉛直風速が形成する循環

(Emanuel 2005)

Hurricane Isabel (2003)の中心付近の観測 ドロップゾンデとフライトレベル観測のコンポジット



(Montgomery et al., 2006)

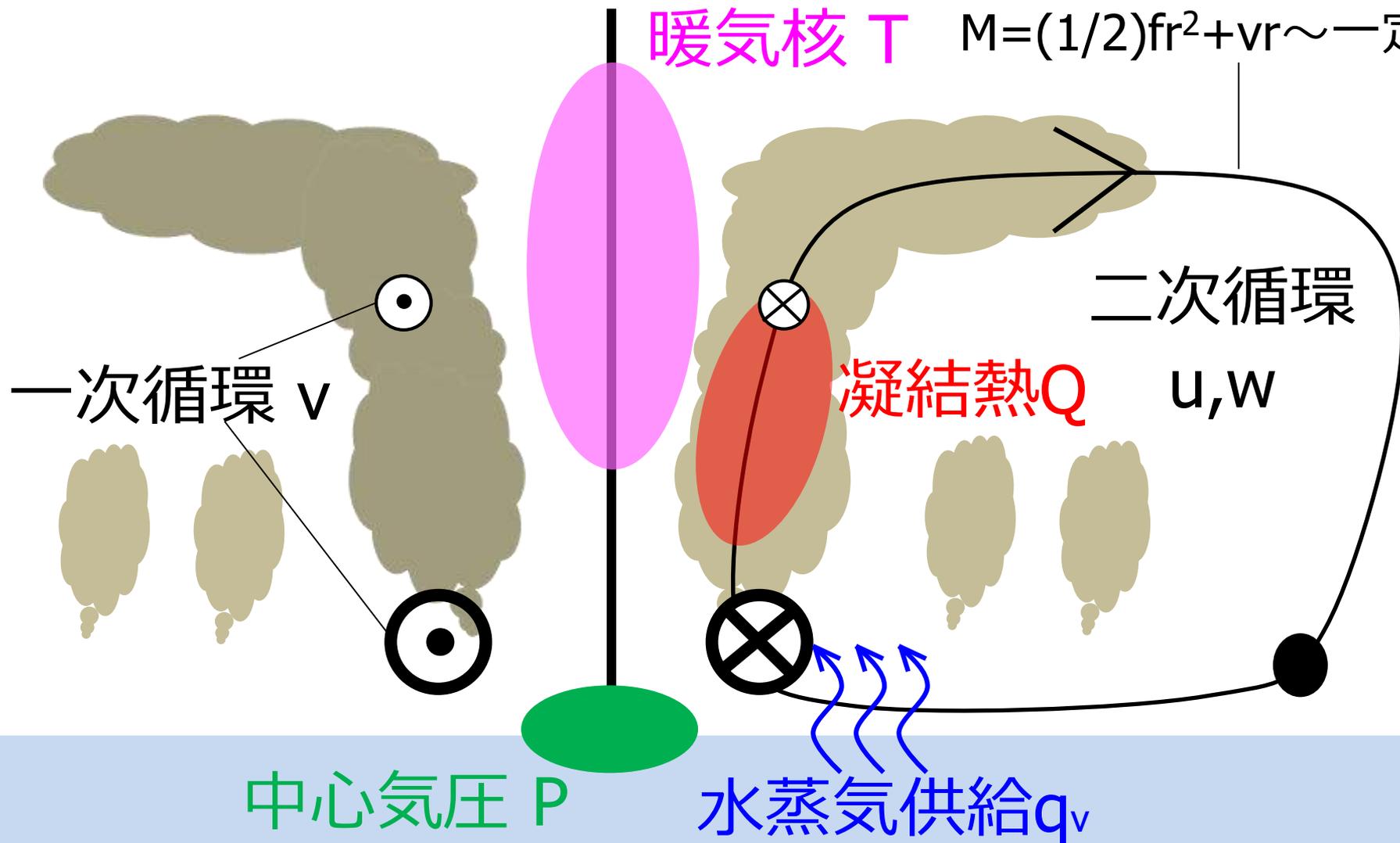
Part 1 軸対称的な渦の特徴

Part 1の目標：台風の軸対称構造を理解

台風を中心

摩擦で減ることを除き
循環に沿って

$$M = (1/2)fr^2 + vr \sim \text{一定}$$



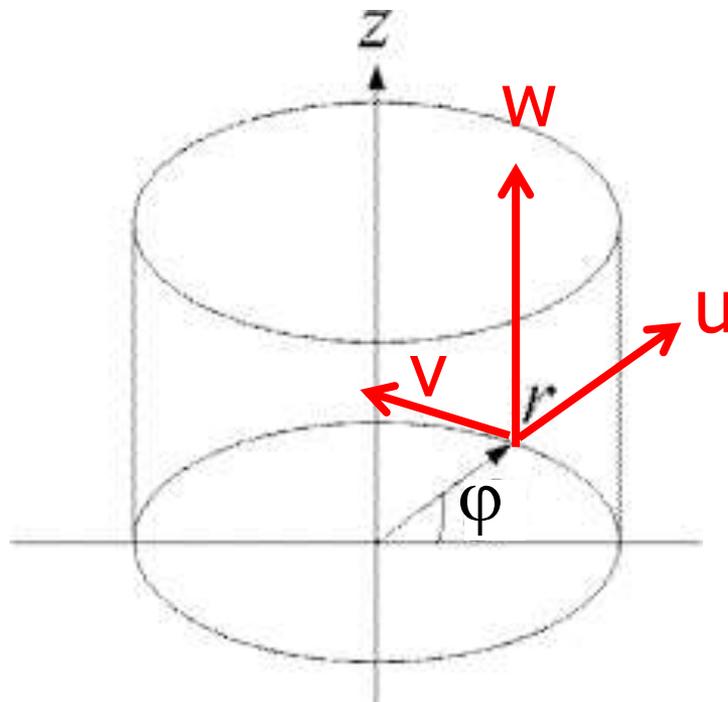
デカルト座標系における基礎方程式

(簡単のため、水蒸気と水が、比熱や密度に及ぼす影響は無視)

- 運動方程式
(風速 (v_x, v_y, v_z))
$$\begin{aligned}\frac{Dv_x}{Dt} - fv_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{Dv_y}{Dt} + fv_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z\end{aligned}$$
- 質量保存則
$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$
- 状態方程式 $p = \rho RT$ or $p\alpha = RT$
- 熱力学の第一法則
$$\dot{Q} = C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} \approx \frac{D(C_p T + gz)}{Dt}$$

円筒座標系への座標変換

- r は原点からの距離、 φ は基準となる方向からの角度(方位角)
(ここでは φ は x 軸を基準とし反時計回りに正の方向)
- u, v は、動径方向・接線(方位角)方向の速度成分で**動径速度**
(Dr/Dt ; 外向きが正), **接線速度** ($rD\varphi/Dt$; 反時計回りが正)
と呼ぶ。



$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= z'\end{aligned}$$

$$v_x = u \cos \varphi - v \sin \varphi$$

$$v_y = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

$$v_z = w$$

鉛直座標については、以後、 z と z' を同じとみなす。

円筒座標系への座標変換

- 位置ベクトルと速度ベクトルの変換

$$x = r \cos \varphi \qquad v_x = u \cos \varphi - v \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \qquad v_y = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

$$z = z' \qquad v_z = w$$

- 関数 $h = h(x, y, z) = h(r, \varphi, z')$ の偏微分

偏微分の連鎖律: x に関する偏微分

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \quad (y, z \text{ に関する偏微分も同様})$$

以上よりデカルト座標系 (x, y, z) から円筒座標系 (r, φ, z')

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z'}$$

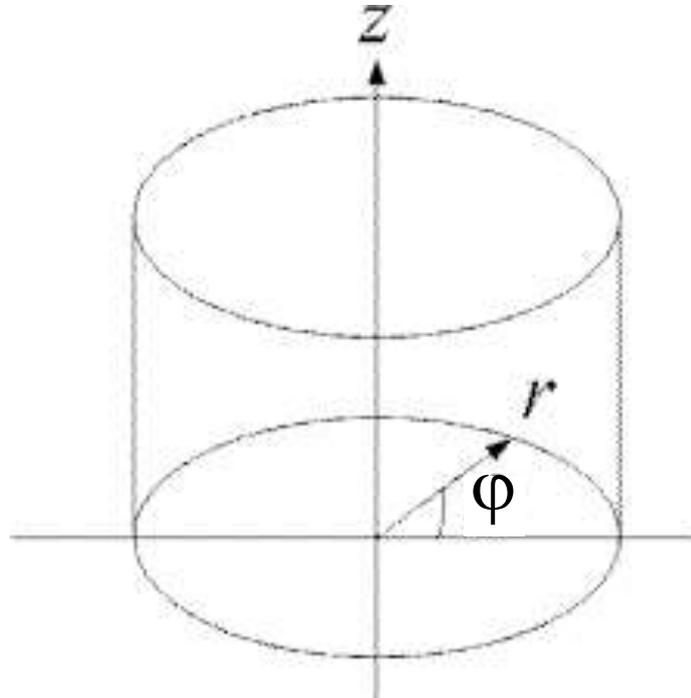
円筒座標系への座標変換

・任意の関数 $h=h(x,y,z,t)=h(r,\varphi,z,t)$ のラグランジュ微分について

$$\begin{aligned}\frac{Dh}{Dt} &= \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + (u \cos \varphi - v \sin \varphi) \left(\cos \varphi \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + (u \sin \varphi + v \cos \varphi) \left(\sin \varphi \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) + w \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + w \frac{\partial h}{\partial z}}\end{aligned}$$

軸対称の仮定

- 軸対称性は数学的に表すと $\partial/\partial\varphi=0$
- これ以降、台風を中心から鉛直に伸びる軸をz軸とし、台風中心で高度 $z=0$ の地点を原点とする。



$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_{\varphi} \xrightarrow{\text{軸対称性の仮定}} \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = F_{\varphi}$$

基礎方程式系 (円筒座標)

- 運動方程式
 (風速 (u, v, w))

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$
 軸対称の仮定
- 質量保存則

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$
 軸対称の仮定
- 状態方程式 $p = \rho RT$ or $p\alpha = RT$
- 熱力学の第一法則

$$\dot{Q} = C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt}$$

基礎方程式系（円筒座標；軸対称）

- 運動方程式
(風速 (u, v, w))
$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = F_\varphi$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

- 質量保存則
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho ru)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- 状態方程式 $p = \rho RT$

- 熱力学の第一法則
$$\frac{\dot{Q}}{C_p T} = \frac{D \log \theta}{Dt}$$

(参考) ラグランジュ微分も $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z}$ と単純化される。

円筒座標系での相対渦度と水平発散

- 相対渦度の鉛直成分と水平発散はデカルト座標系で

$$\zeta = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \phi = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

と表される。ここで、

$$v_x = u \cos \varphi - v \sin \varphi$$

$$v_y = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

を代入すると、

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta &= \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial(vr)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \phi &= \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{aligned} \right.$$

軸対称を
仮定する

相対渦度の鉛直成分

$$\zeta = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial(vr)}{r \partial r}$$

$$\phi = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial(ur)}{r \partial r}$$

水平発散

平衡狀態

静力学平衡

- 台風の内部コアを考えるうえでも静力学平衡は基本場の精度のよい近似となる

$$\frac{Dw}{Dt} = \boxed{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g} + F_z$$

$$u \approx 10\text{m/s}, w \approx 5\text{m/s}, \delta w \approx 10\text{m/s}, \delta z = 10\text{km}, \delta r = 20\text{km}$$

$$\rightarrow u \frac{\partial w}{\partial r} \approx w \frac{\partial w}{\partial z} < 0.01 \ll g = 9.8 \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

- 静力学平衡の式

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g$$

傾度風平衡

- 動径方向の運動方程式は以下の通りである。

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r$$

A B C D E

- B(遠心力), C(コリオリ力), D(気圧傾度力)のつり合いが成り立つ状態のことを**傾度風平衡**という。
- 強い台風の内部コアを考える
 $\delta u \sim 5\text{m/s}$, $\delta t \sim 1000\text{s}$, $v \sim 60\text{m/s}$, $r \sim 20\text{km}$, $f \sim 5 \times 10^{-5}/\text{s}$
→ $B/C \sim 60.0$, $A/B \sim 0.025$
 - 地衡風平衡($B/C = v/fr = Ro \ll 1$)は成り立たない。
 - 傾度風平衡は自由大気でよい近似となるが、境界層や動径風の変化の激しい壁雲近傍では粗い近似。

静力学平衡 + 傾度風平衡 ⇒ 温度-風関係

- 静力学平衡と傾度風平衡及び動径風速が0の状態を基本場として $\bar{\quad}$ で表す。

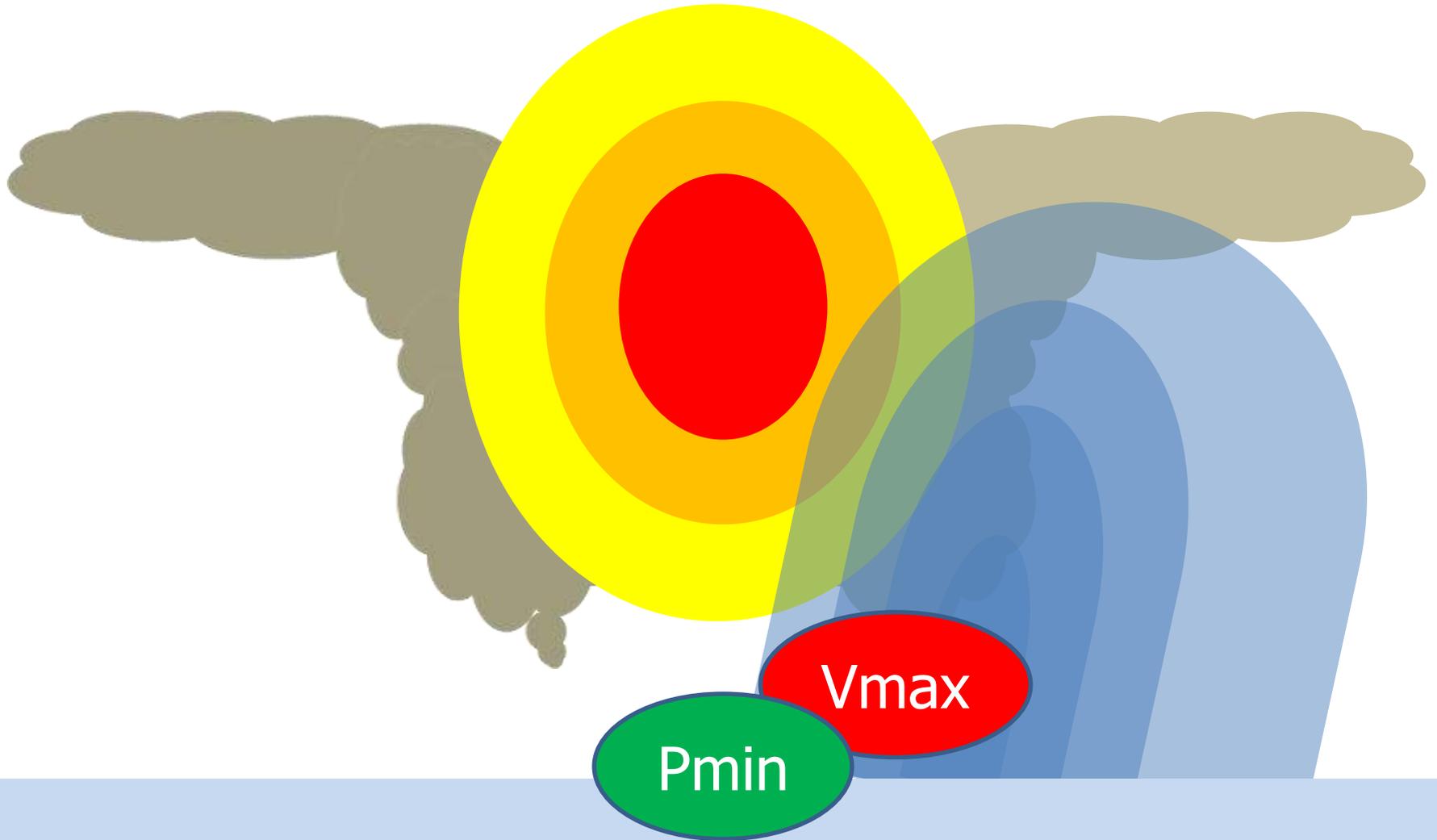
$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g \quad \frac{\bar{v}^{-2}}{r} + f\bar{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \quad \bar{u} = 0$$

- これと状態方程式を組み合わせると温度-風関係の式が現れる（導出は省略）。

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_r = \frac{g}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_p$$

- 北半球における台風の場合
中心に近づくほど温位が上がる(暖気核)
⇒ 上空に行くほど接線風速が弱い

ここまでのまとめ：基本場の関係



準保存量

(絶対角運動量と飽和相当温位)

絶対角運動量の保存則

接線方向の運動方程式 $\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = F_\phi$

$u \equiv Dr / Dt$ を代入し両辺に r を掛ける →

$$r \frac{Dv}{Dt} + v \frac{Dr}{Dt} + fr \frac{Dr}{Dt} = rF_\phi$$

$$\frac{D\left(rv + (1/2)fr^2\right)}{Dt} = r \frac{Dv}{Dt} + v \frac{Dr}{Dt} + fr \frac{Dr}{Dt} \rightarrow$$

本来、角運動量はベクトル量だが、台風業界では鉛直成分だけを指してこう呼ぶ。

絶対角運動量M

$$\frac{D\left(rv + (1/2)fr^2\right)}{Dt} = rF_\phi$$

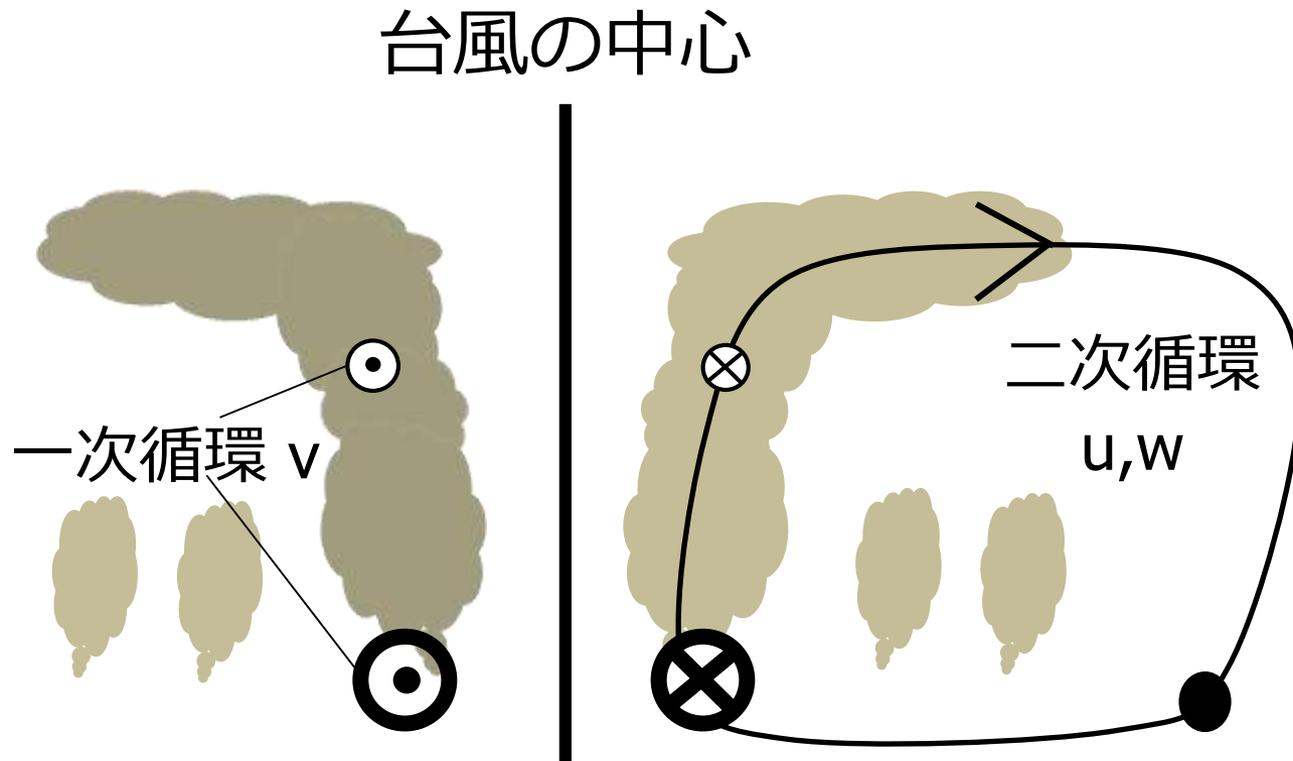
$$\frac{D\left(rv + \left(\frac{1}{2}\right)fr^2\right)}{Dt} = rF_\varphi \text{ の解釈}$$

- 軸対称系で、摩擦力や粘性などが接線方向に働かないとき($F_\varphi=0$)、**絶対角運動量 $M=rv+(1/2)fr^2$** が空気塊に沿って保存。
- 絶対角運動量をなす2つの項は、それぞれ以下のように解釈できる
 - $(1/2)fr^2$: 回転系であることから生じる成分
 - rv : 系に相対的な回転運動に伴う成分

台風への応用例

- コリオリパラメータを $f=5.0 \times 10^{-5}$ (北緯約20度に相当)とし、 $r=300$ kmにあった接線風速ゼロの空気塊が摩擦の影響なく、 $r=50$ kmに到達すると、接線風速はいくらになるか？

$$M = 2.5 \times 10^{-5} \times (3.0 \times 10^5)^2 = v \times 5.0 \times 10^4 + 2.5 \times 10^{-5} \times (5.0 \times 10^4)^2$$
$$\rightarrow v = 43.75 \text{ m/s}$$



台風の発生・経路分布

(D'Asaro et al., 2011)

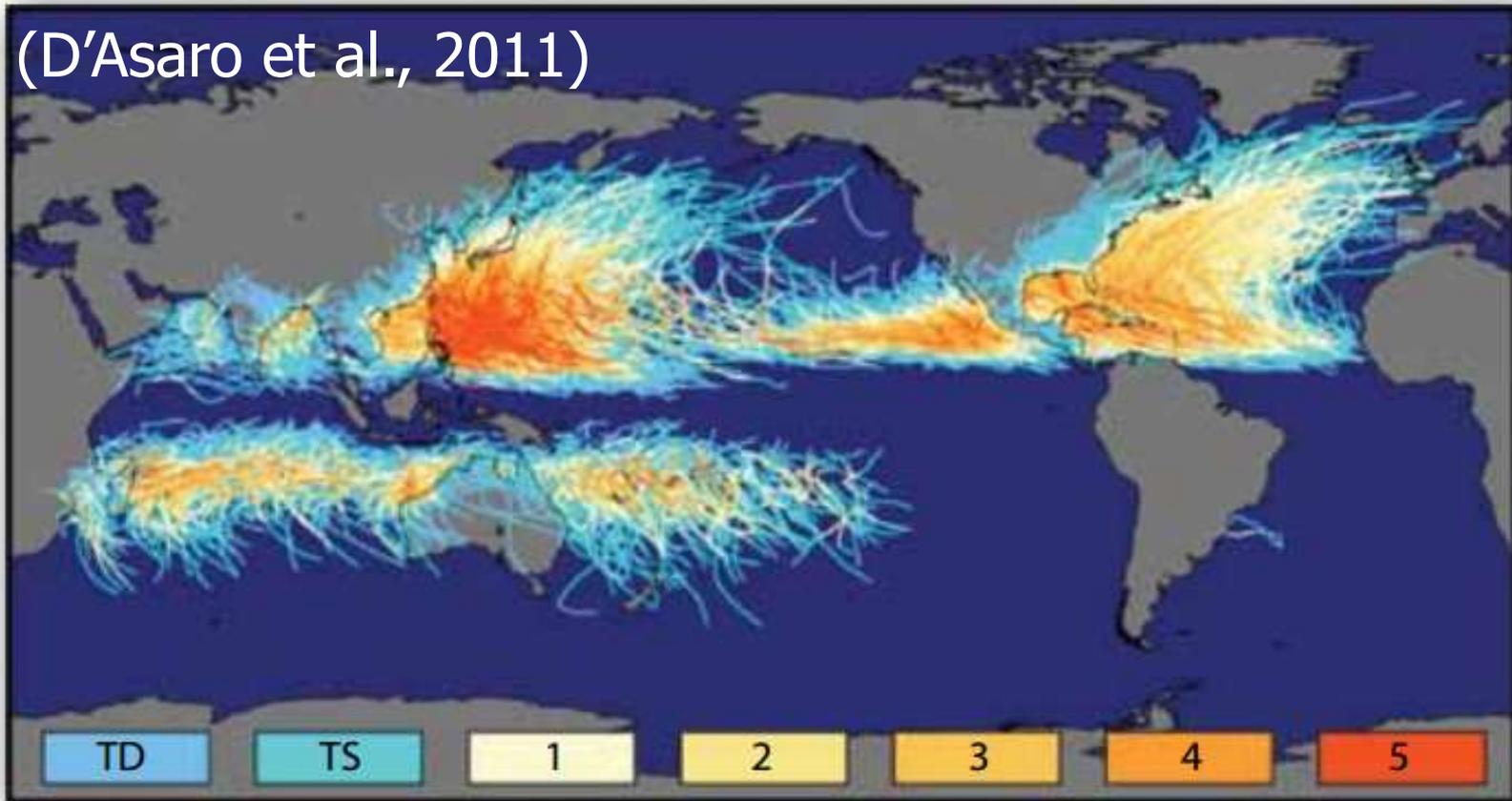


Figure 1. Worldwide tropical cyclone tracks through 2006 from the National Hurricane Center and the Joint Typhoon Warning Center, spanning nearly 150 years. Each track is colored by storm intensity using the Saffir-Simpson storm categories (Tropical Depression, Tropical Storm, and Tropical Cyclone categories 1 [$\text{wind } 33\text{--}42 \text{ m s}^{-1}$] to 5 [$\text{wind } > 70 \text{ m s}^{-1}$]). The tracks show that the regions of most frequent and intense storms are in the western North Pacific. *Image courtesy of NASA Earth Observatory*

相当温位の導出(偽断熱過程)

(1kgあたりの)
非断熱加熱率

$$\dot{Q} = C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{Dp}{Dt}$$

- 空気中の水蒸気が全て凝結したとする (凝結以外の非断熱加熱はないとする)

$$\dot{Q} = -L \frac{Dq_v}{Dt} \quad \text{水蒸気混合比}$$

$$C_p dT + L dq_v - \alpha dp = 0$$

温度変化項は

$$C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} + L \frac{Dq_v}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\log \theta + \frac{Lq_v}{C_p T} \right) = 0$$

飽和相当温位

$$\rightarrow \theta_e = \theta \exp \left(\frac{Lq_v}{C_p T} \right) = \text{const.}$$

相当温位について

- 相当温位は、パーセルについて、水蒸気供給や凝結以外の熱のやり取りがなければ、物質的に保存する。
- 逆に言うと、水蒸気供給や放射過程などの影響がある場合、相当温位は変化する。

- 乾燥比エントロピー s_d

$$\frac{\dot{Q}}{T} = C_p \frac{D \log \theta}{Dt} = \frac{Ds_d}{Dt} \rightarrow s_d = C_p \log \theta$$

- 凝結以外の非断熱加熱で変化するエントロピーを湿潤比エントロピーと定義する。

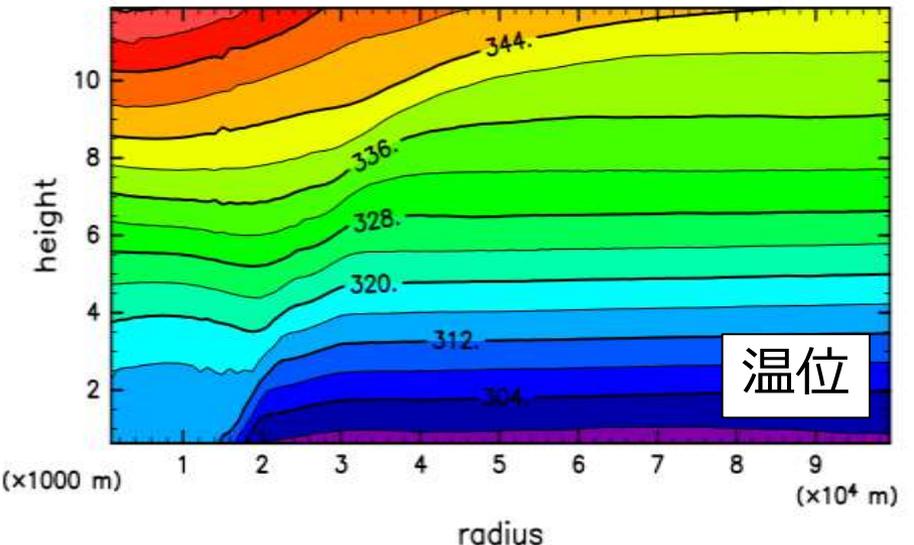
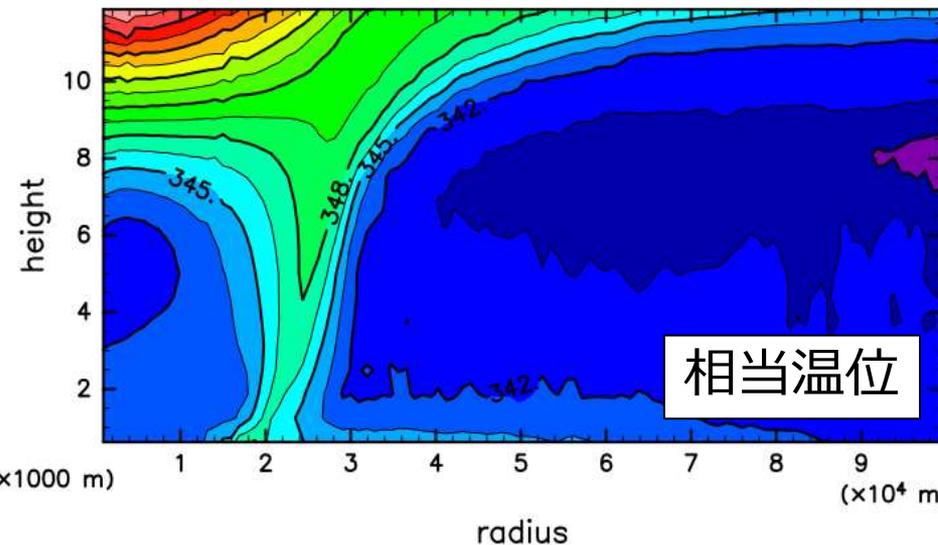
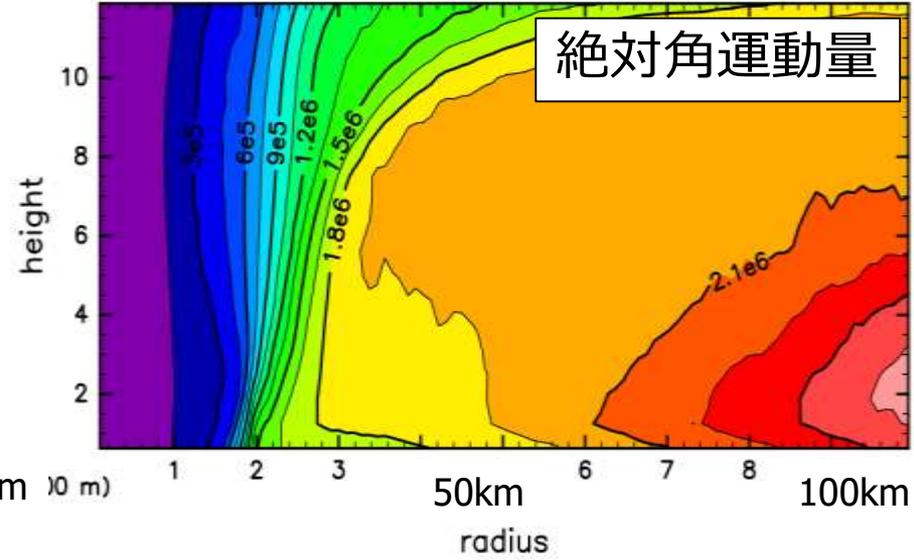
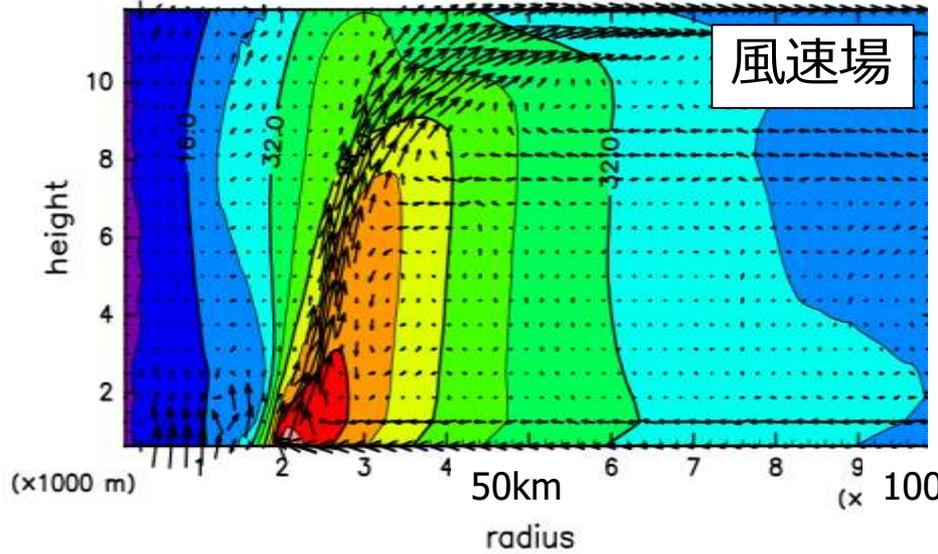
$$\frac{\dot{Q}'}{T} = \frac{\dot{Q}}{T} - \frac{L}{T} \frac{Dq_v}{Dt} = C_p \frac{D \log \theta_e}{Dt} = \frac{Ds_m}{Dt} \rightarrow s_m = C_p \log \theta_e$$

湿潤比エントロピーは相当温位と等価

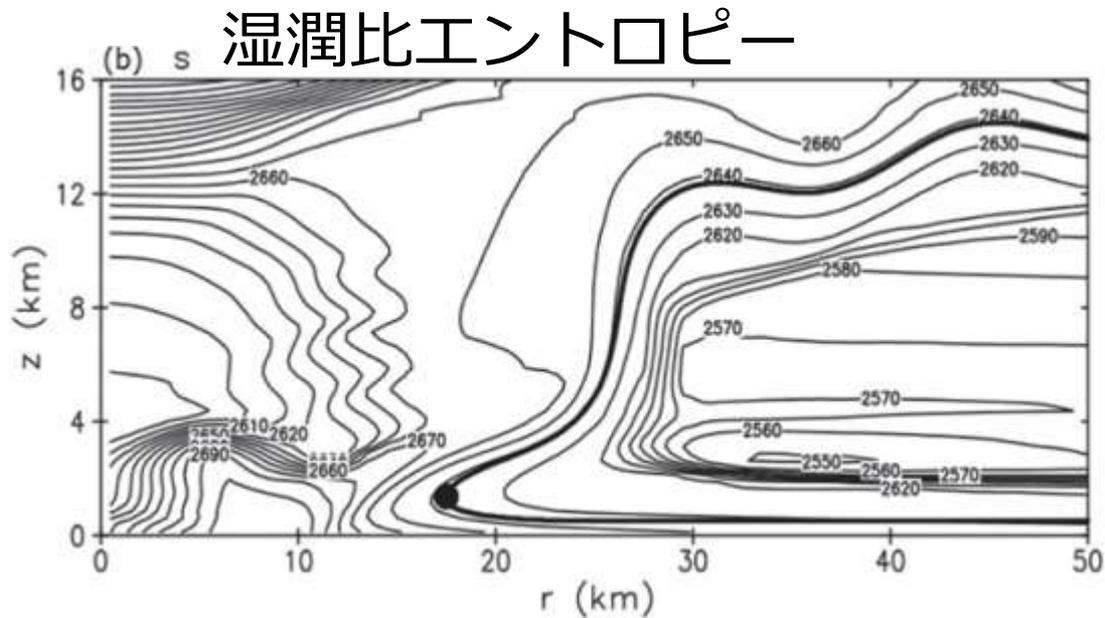
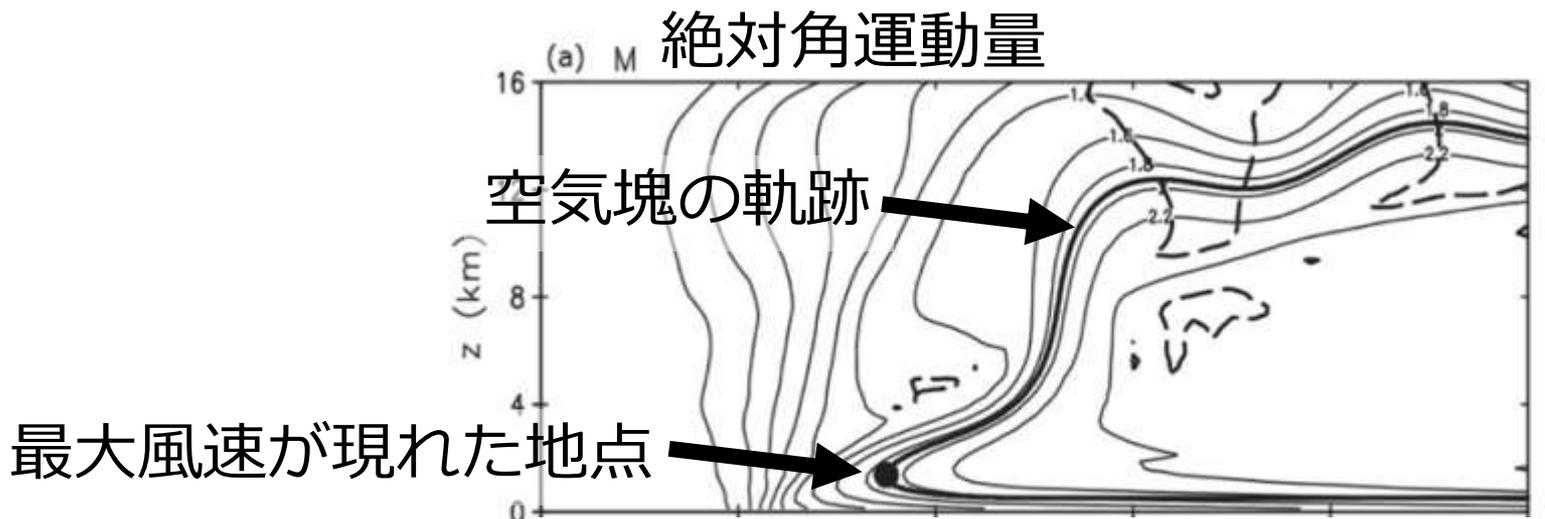
- 壁雲の中では相当温位 \approx 飽和相当温位

非静力学軸対称モデルによる準定常状態の台風の構造

$\Delta r=937.3\text{m}$, $\Delta z=625\text{m}$, 準定常状態



軸対称台風モデルを用いた理想化実験



まとめ：台風ライクな軸対称渦の基本場

- 静水圧平衡と傾度風平衡が近似的な平衡状態。
- 静水圧平衡：上空が暖かければ下層ほど気圧低い
- 傾度風平衡：海面気圧が低ければ強い接線風速
- 温度-風関係としては、
 - 「上空に行くほど接線風が弱くなる」と
 - 「中心に近づくほど温度が上がる(暖気核)」
- 成熟期の台風の壁雲に沿った準保存量としては
 - 絶対角運動量
 - 相当温位
(及びそれと等価な湿潤比エントロピー)
 - 2つの保存量の等値線は平行。
⇒WISHE理論の重要な仮定の一つ

擾動と不安定

基礎方程式系（円筒座標系；軸対称を仮定）

傾度風平衡

- 運動方程式
(風速 (u, v, w))

$$\frac{Du}{Dt} \left[\frac{v^2}{r} - fv \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = F_\varphi \Rightarrow \text{変形して絶対角運動量保存則}$$

静水圧平衡

$$\frac{Dw}{Dt} \left[= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \right] + F_z$$

- 質量保存則

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho ru)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- 状態方程式 $p = \rho RT$

- 熱力学の第一法則 $\frac{\dot{Q}}{C_p T} = \frac{D \log \theta}{Dt}$

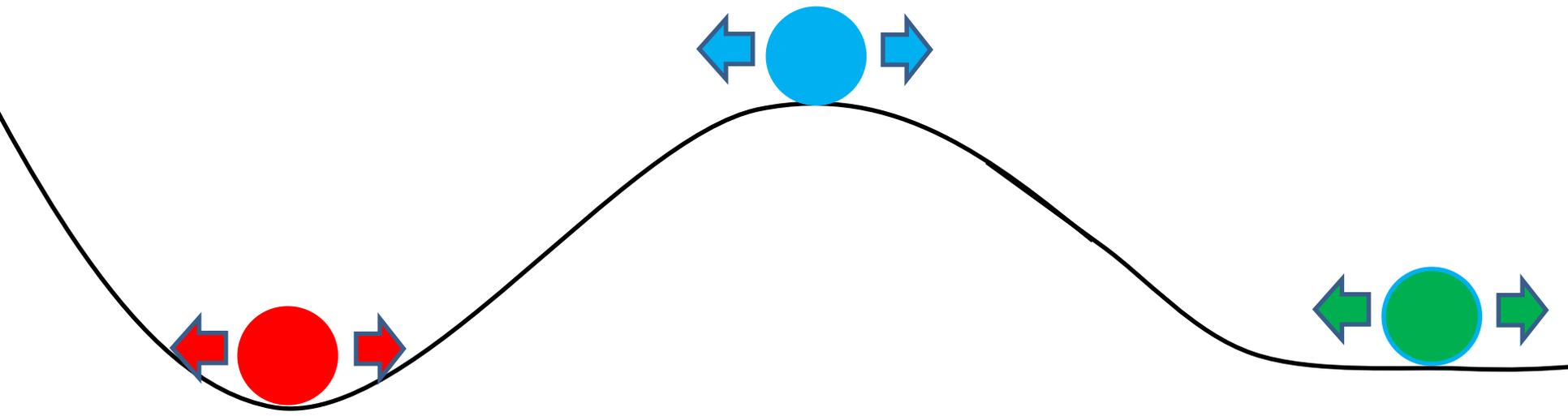
(参考) ラグランジュ微分も $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial r} + w \frac{\partial f}{\partial z}$ と単純化される

大まかな説明

- 基本場を元の方程式からさっぴいて現れる摂動と安定性の議論から以下のことがわかる
 - 水平運動を特徴づけるのは慣性安定度や絶対渦度
 - 二次循環（動径風と鉛直風）の構造上の特徴
- 温度風平衡の式に熱力学の第一法則を結びつけることで、加熱及び摩擦に対する二次循環の応答が説明できる (Sawyer-Eliassenの方程式)

物理学における安定性

- 物理学では「ちょっとした変化が大きくな変化になる」ことを**不安定**という
- 例：下図の静止状態にあるボールの速度を考える。
赤：安定、**青**：不安定、**緑**：中立
→ボールの少しの動き（擾乱）が拡大するかどうかはその環境の状態（坂；基本場）に依存している
- 基本場と擾乱が何なのかは、議論する本人が決める



成層安定性

- パーセル法により乾燥気体の鉛直運動を考えると、

$$\frac{D^2 \delta z}{Dt^2} = - \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \delta z = -N^2 \delta z$$

- ここで N^2 を成層安定度といい、 N は空気塊の振動数を表している。
- 解釈：基本場の温位が上空ほど低いとき $\partial \theta / \partial z < 0$ 空気塊の微小な変位 δz は時間を追って拡大する。逆に上空ほど高いとき $\partial \theta / \partial z > 0$ は気塊は鉛直に振動。

慣性安定性：傾度風平衡の近傍

円筒座標系(r, ϕ, z)において密度が一定で粘性拡散項を無視し、鉛直流がないとすると、

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = 0$$

基本場は傾度風平衡にあり、かつ、動径風速=0とする。また、f面を考える。

$$-\frac{\bar{v}^2}{r} - f\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r}, \quad u = u'$$

この条件のもとで、水平風速摂動(\cdot)'に関する式を立てると
(気圧・鉛直風摂動と摂動の2乗に関する項は無視)

→次ページ

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) v' = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) u' = 0.$$

これを組み合わせると

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + I^2 u' = 0, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + I^2 v' = 0,$$

相対渦度

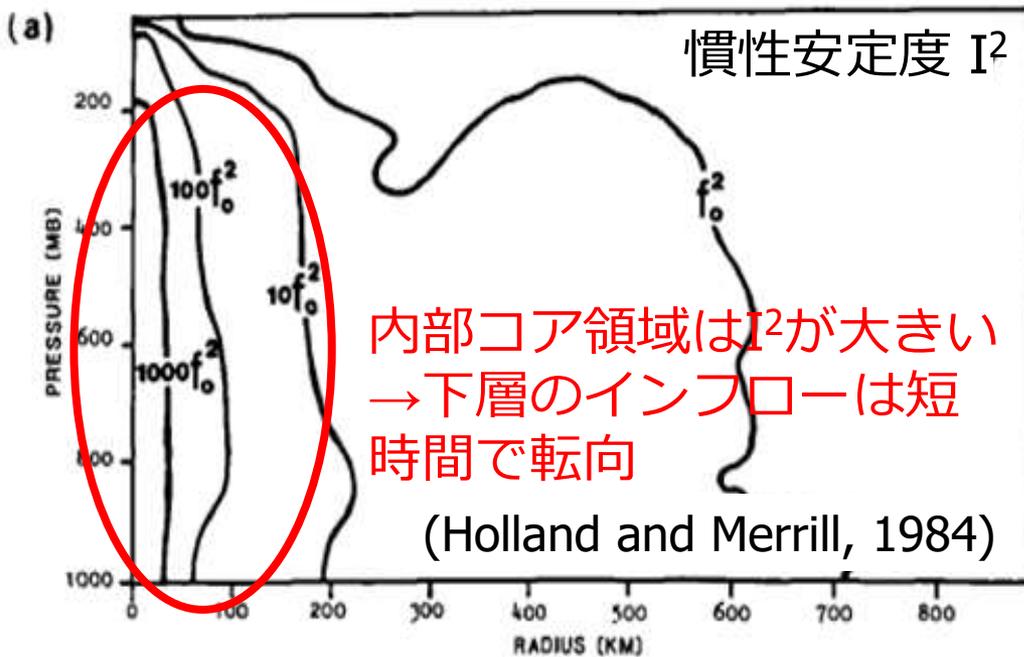
$$I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$$

傾度風平衡及び $u=0$ の状態からの水平風速摂動は局所的な慣性振動を起こす。 I^2 は慣性安定度と呼ばれる。周期は $2\pi/I$ 、水平運動のスケールは小さい(プールの例え?)

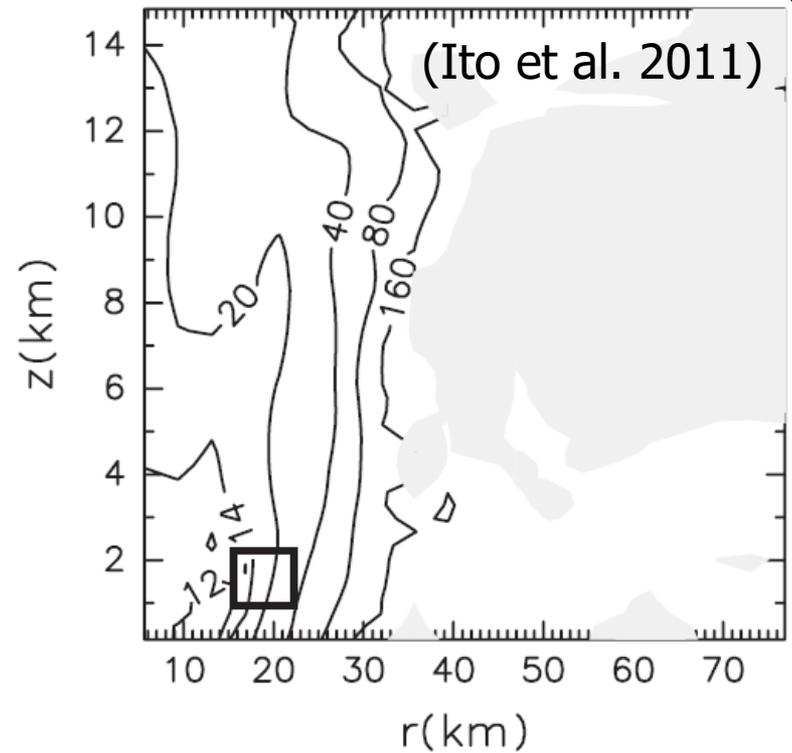
慣性安定度 $I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$

- 台風中心付近では $f+\zeta$ が大きく、慣性安定度も大きい。
- u' と v' は周期 $2\pi/I$ (台風内部では $<1h$)で振動する
 → 台風の内側に向かう吹き込みは短時間で0になる。
 → 水平発散は $\phi = \partial(ur) / \partial r$ なので水平収束が存在する

台風観測のコンポジット解析に基づく慣性安定度



軸対称モデルにおける振動周期(分)



慣性安定度と絶対角運動量

- 慣性安定度 $I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + I^2 u' = 0, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + I^2 v' = 0,$$

なので、 $I^2 < 0$ (慣性不安定) で摂動は拡大する

- 絶対角運動量 $M = rv + \frac{1}{2} fr^2$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial M^2}{\partial r} = \frac{M}{r^3} \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \left(rv + \frac{1}{2} fr^2 \right) \left(v + r \frac{\partial v}{\partial r} + fr \right) = I^2$$

なので、渦の外側に行くほど $|M|$ が小さければ慣性不安定になる。

壁雲の傾斜

- 壁雲は一般に上空に行くほど外側に向かうような傾斜を持つ

Hurricane Katrinaの眼の壁雲の様子



<http://www.noaanews.noaa.gov/stories2005/s2496.htm>



仲底商店 波照間島
@nakasoko85

フォローする

まるで天空の城ラピュタの龍の巣のような雲。目の中は晴れ渡り無風です。これから吹き返しの暴風が来ると思うと信じられない静謐な空気です。



18:36 - 2015年8月23日

1,693件のリツイート 1,167件のいいね

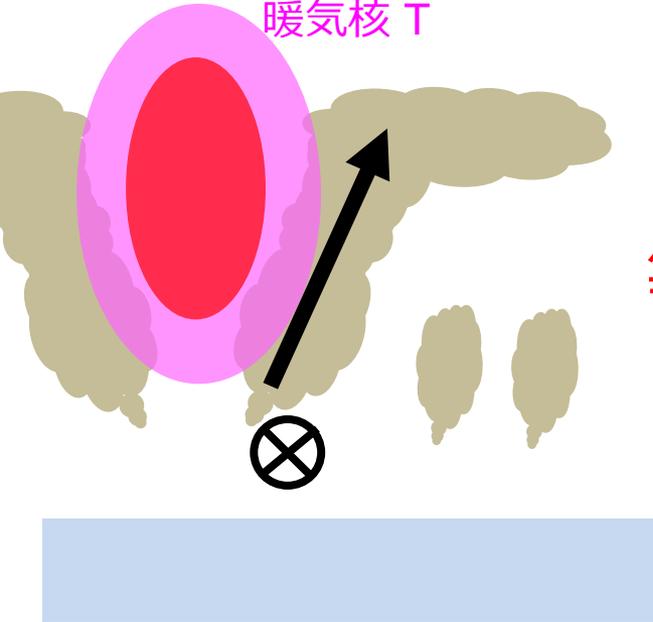


10 1,693 1,167

等絶対角運動量面を考えてみる

台風を中心

暖気核 T



$$\delta M = \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_z \delta r + \left(\frac{\partial M}{\partial z} \right)_r \delta z$$

$\delta M = 0$ となる面を考える \rightarrow

等M面の傾斜

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_M = - \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_z / \left(\frac{\partial M}{\partial z} \right)_r$$

$M = \frac{1}{2} f r^2 + r \bar{v}$ を代入する \rightarrow

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_M = - \frac{f + \bar{\zeta}}{\partial \bar{v} / \partial z}$$

温度-風関係 $\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_r = \frac{g}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_p$ を代入する \rightarrow

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_M = \frac{(f + \bar{\zeta})(f + 2\bar{v}/r)}{-(g/\theta_0)(\partial \theta / \partial r)} = \frac{I^2}{-(g/\theta_0)(\partial \theta / \partial r)} = \frac{\text{Inertial stability}}{\text{Baroclinicity}}$$

絶対角運動量面で傾きを考える

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_M = \frac{(f + \bar{\zeta})(f + 2\bar{v}/r)}{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)} = \frac{I^2}{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)} = \frac{\text{Inertial stability}}{\text{Baroclinicity}}$$

- 上空に行くと
暖気核がある： Baroclinicityが大きくなる
接線風速が弱くなる： I^2 は小さくなる
→壁雲は一般に上空に行くほど外側に向かうような傾斜を持つ
- 典型的な値で計算してみる。

$$\theta_0 = 250K, \delta\theta = 10K, \delta r = 25km, \frac{2\pi}{I} = 40 \text{ min} \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_M = \frac{I^2}{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)} \approx 0.4$$

等温位面を考えてみる

$$\delta\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_z \delta r + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_r \delta z$$

$\delta\theta = 0$ となる面を考える \rightarrow

等 θ 面の傾斜 $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta = -\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_z / \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_r$

分母と分子に g/θ_0 をかける \rightarrow

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta = \frac{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)}{(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial z)} = \frac{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)}{N^2} = \frac{\text{Baroclinicity}}{\text{Static Stability}}$$

注：ただし、壁雲中の空気塊は等 θ 面上ではなく、ほぼ等 θ_e 面上を通過すると考えられるので、これが壁雲の勾配に等しいわけではありません。

基本場が渦である場合の摂動の振る舞いは 慣性安定度 I^2 で特徴づけられる

$$I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$$

地衡風平衡 (デカルト座標系)	基本場 (座標系)	傾度風平衡 (円筒座標系)
f^2 (※)	慣性安定度	I^2
$2\pi / f$	慣性周期・ 調節の時間スケール	$2\pi / I$
$(gH)^{1/2} / f, NH / f$	変形半径	$(gH)^{1/2} / I, NH / I$
$(gH + f^2 / k^2)^{1/2}$	慣性重力波の 位相速度	$(gH + I^2 / k^2)^{1/2}$
$(\nu / f)^{1/2}$	エクマン境界層厚さ	$(\nu / I)^{1/2}$

(※)水平シアが弱い場合

Sawyer-Eliassenの方程式を用いた 二次循環の理解

- 質量流線関数 ψ を以下のように定義する。

$$\psi \equiv -r \int_0^z \rho_0 u dz$$

- 質量保存則より $\partial(\rho_0 r u) / \partial r + r \partial(\rho_0 w) / \partial z = 0$

$$u = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Sawyer-Eliassenの方程式

- 温度-風関係と熱力学の第一法則を組み合わせ、熱源と運動量源（摩擦など）に対する二次循環の応答をみることが出来る。
- 導出の方針：温度-風関係の式の時間微分を取り、線形化された「接線風速の運動方程式」「熱力学第一法則」を組み合わせて時間変化項を消去する。

$$\text{温度-風関係(※)} \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

※右辺は等圧面上で成り立つので、簡単のため、
zは幾何高度ではなく対数圧力を使って定義される
偽高度だと思ってください。

時間微分 ↓

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$$



整理

$$\frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$$

接線方向の
運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial r} - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi - \frac{uv}{r} - fu = -u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi$$

$$\frac{2}{r} \left(-u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(-u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi \right) \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$$

熱力学の
第一法則

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{u}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{w}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\dot{Q}}{C_p T_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(-u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi \right) \right\} = \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(-u \frac{\partial \theta}{\partial r} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\theta_0 \dot{Q}}{C_p T_0} \right) \right)$$

整理

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(-u(f + \zeta) - w \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \right\} - \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(-u \frac{\partial \theta}{\partial r} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) F_\varphi \right\} + \frac{g}{C_p T_0} \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \right)$$

慣性安定度と成層安定度の定義 $I^2 = \left(f + \frac{2v}{r} \right) (f + \zeta)$, $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ -I^2 u - \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) w \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} u + N^2 w \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) F_\varphi \right\} + \frac{g}{C_p T_0} \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \right)$$

温度-風関係 $\gamma = - \left(f + 2v/r \right) \left(\partial v / \partial z \right) = - \left(g / \theta_0 \right) \left(\partial \theta / \partial r \right)$

質量流線関数の定義 $u = - \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$, $w = \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$

Sawyer-Eliassenの方程式

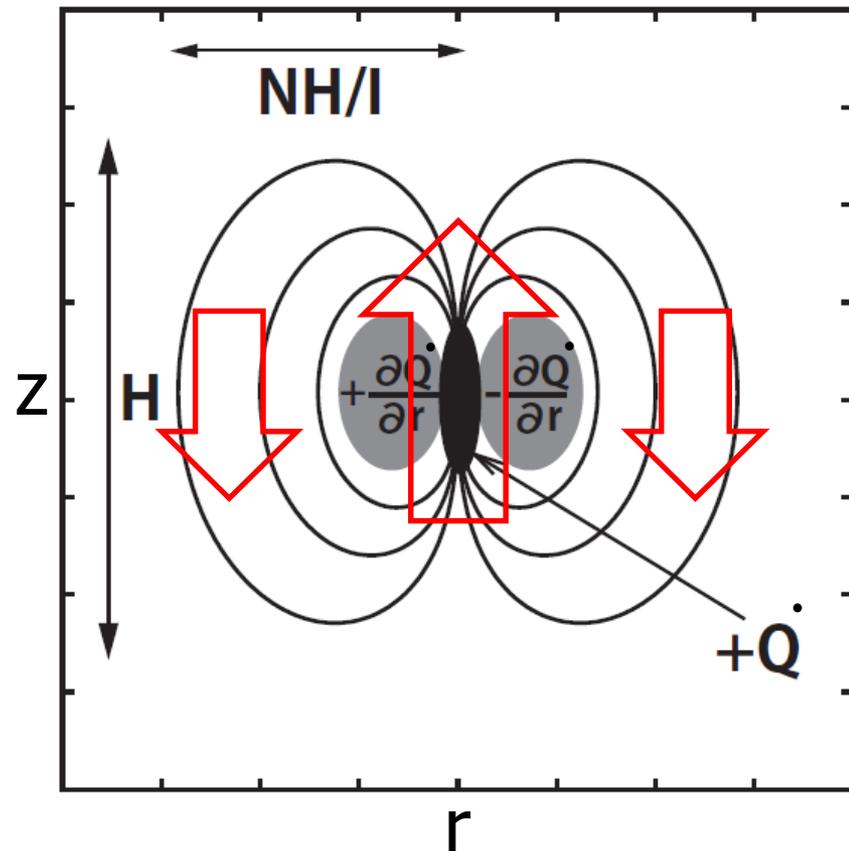
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\gamma}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{I^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) F_\varphi \right\} + \frac{g}{C_p T_0} \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \right)$$

Sawyer-Eliassen方程式の解釈

- 簡単のため、 I と N が一定とし、 $\gamma = 0$ 、摩擦などの運動量ソース無しとして、加熱源 \dot{Q} に対する二次循環の応答を考える。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{g}{C_p \theta_0} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r}$$

- この式から分かること $\propto -\psi$
 - 右辺は加熱源をはさんで正と負になる。左辺は $-\psi$ (質量流線関数)に概ね比例する
 ⇒加熱源で上昇流、その周りで下降流となる二次循環
 - 二次循環のアスペクト比は、左辺の2項の比較から I/N
 ⇒慣性安定度と成層安定度で二次循環の構造が決まる。



Sawyer-Eliassen方程式における変数変換

- Schubert and Hack (1983)は半径 r を座標に使う代わりに、以下で定義されるポテンシャル半径 R を使うことを提案。
(定義より、 R が一定ならば、絶対角運動量 M も一定)

$$M = \frac{1}{2} fR^2 = \frac{1}{2} fr^2 + rv$$

- Sawyer-Eliassen方程式は以下のようなになる(導出は省略)。
(q は渦位に定数をかけたもの、
 s は変換された座標系における慣性安定度)

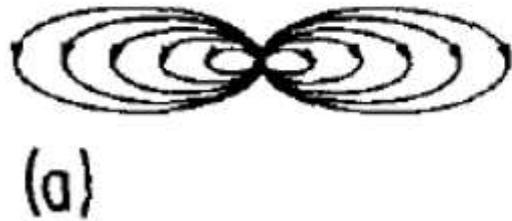
$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{q}{R} \frac{\partial (R\psi)}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(s \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R}$$

- すなわち、順圧大気中における熱源に対する二次循環の応答は、傾圧大気においても半径座標をポテンシャル半径座標(絶対角運動量座標)に沿って成り立っている。

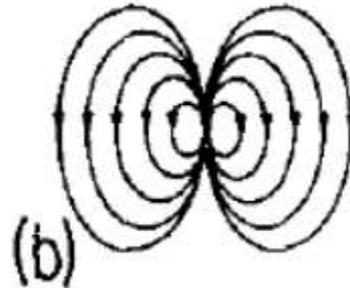
熱源と運動量源に対する応答

熱源

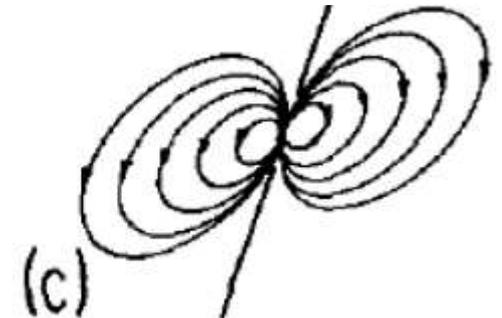
$N > I$, 順圧



$I > N$, 順圧

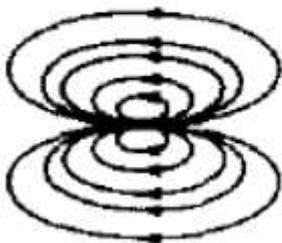


傾圧



運動量源

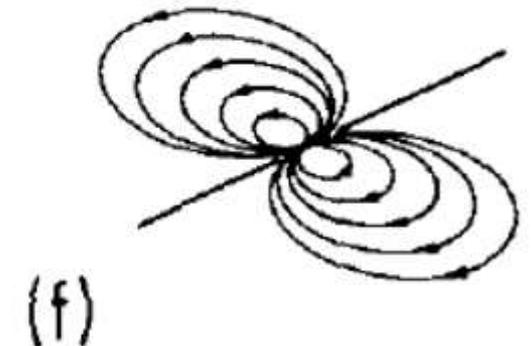
$N > I$, 順圧



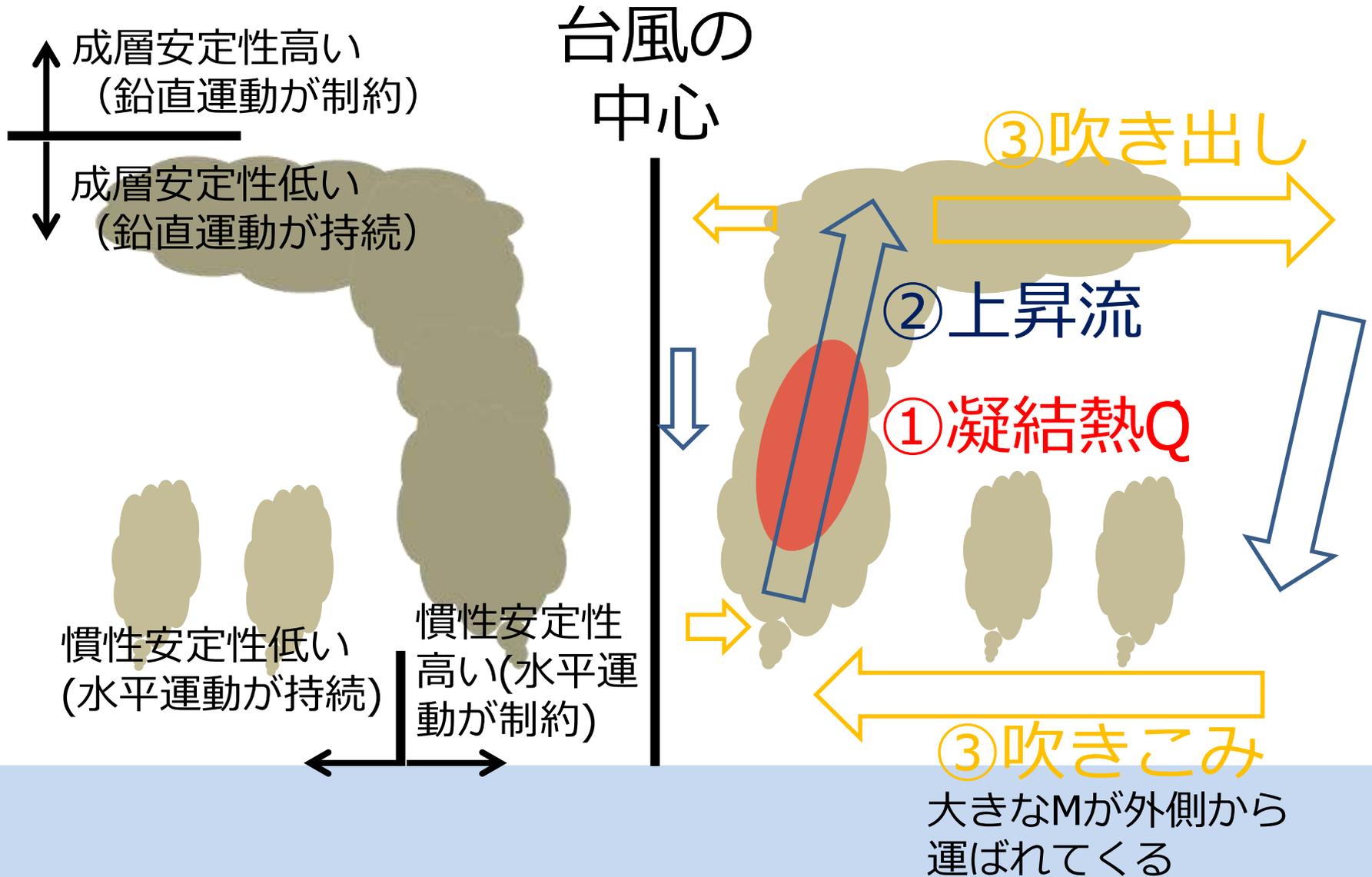
$I > N$, 順圧



傾圧

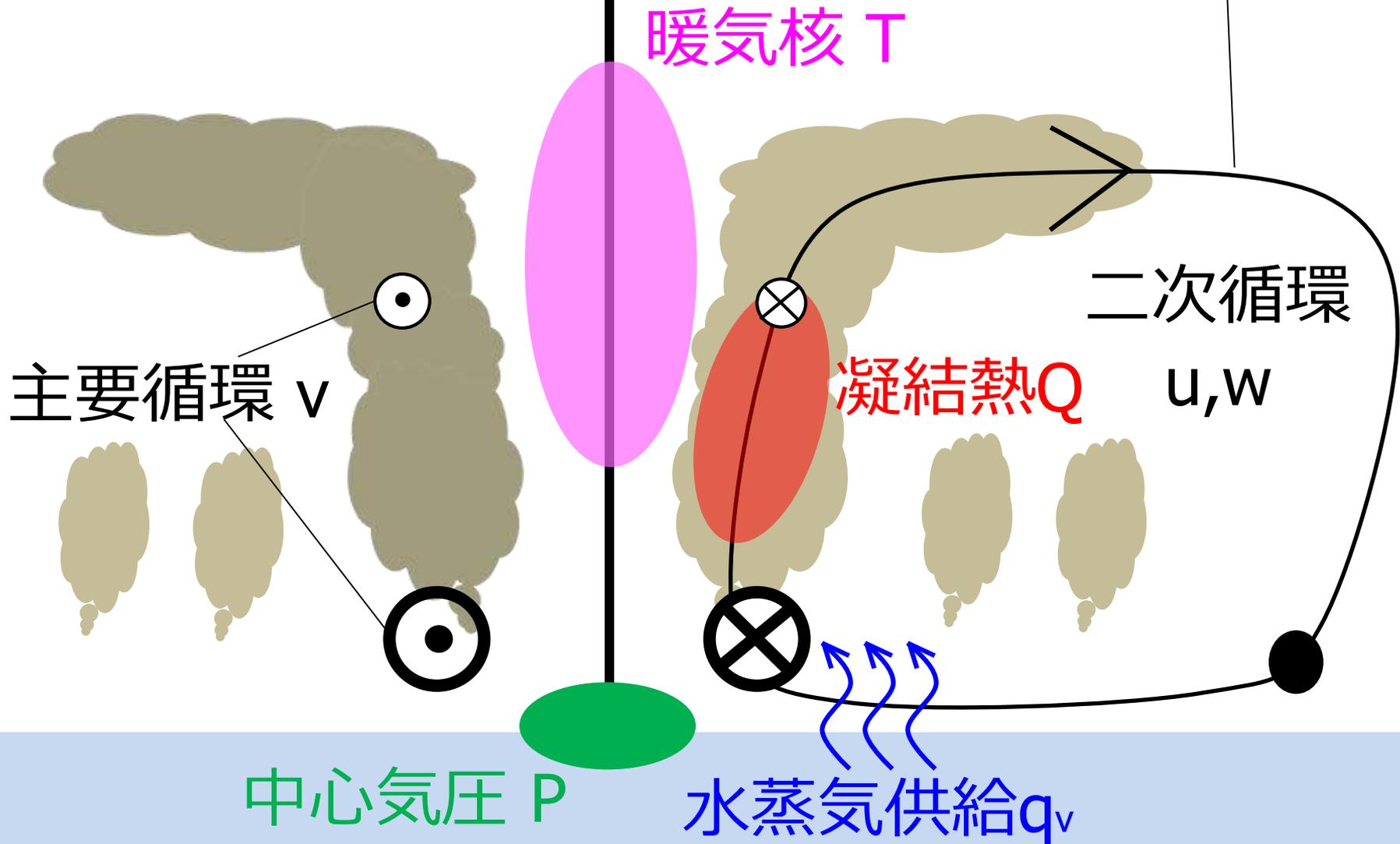


まとめ：安定性と二次循環



台風の中心

摩擦で減ることを除き
循環に沿って
 $M = (1/2)fr^2 + vr \sim \text{一定}$

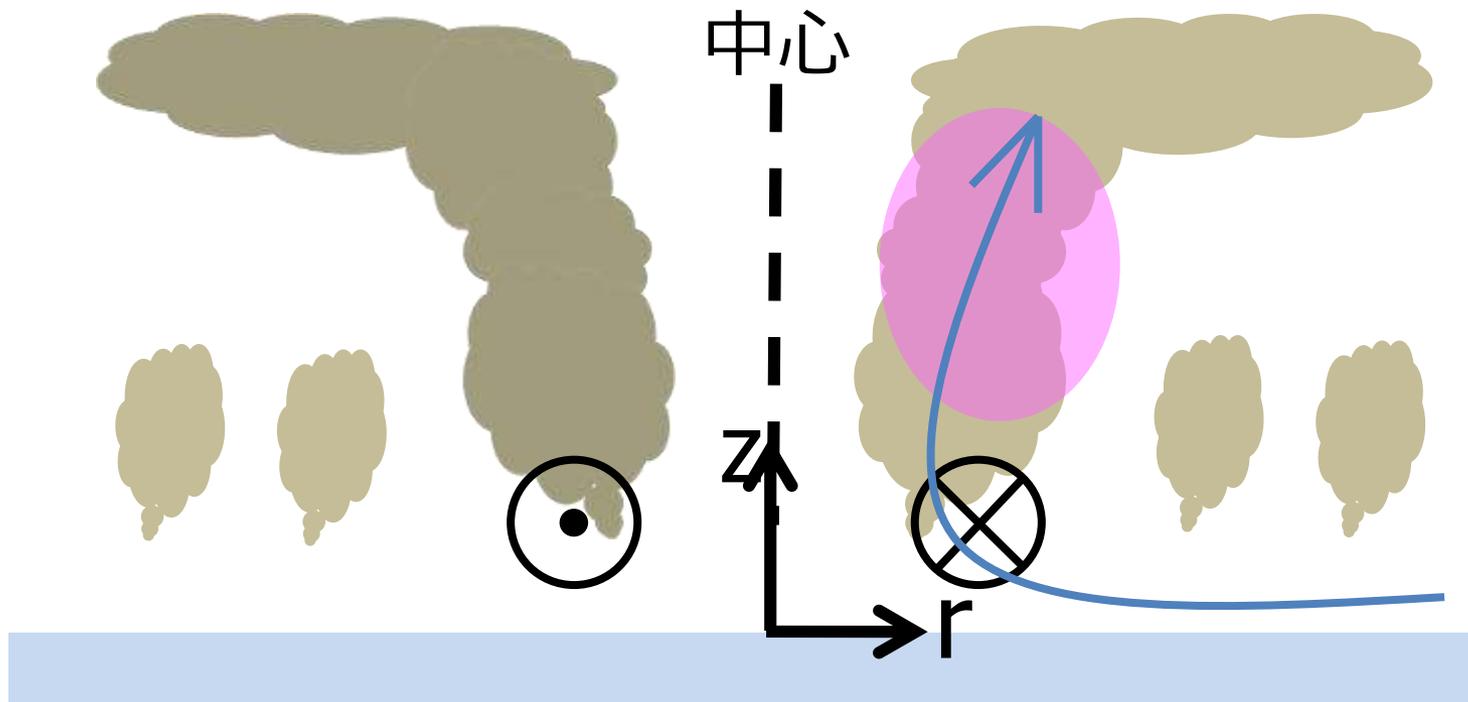


Part 2 WISHEメカニズム

CISK

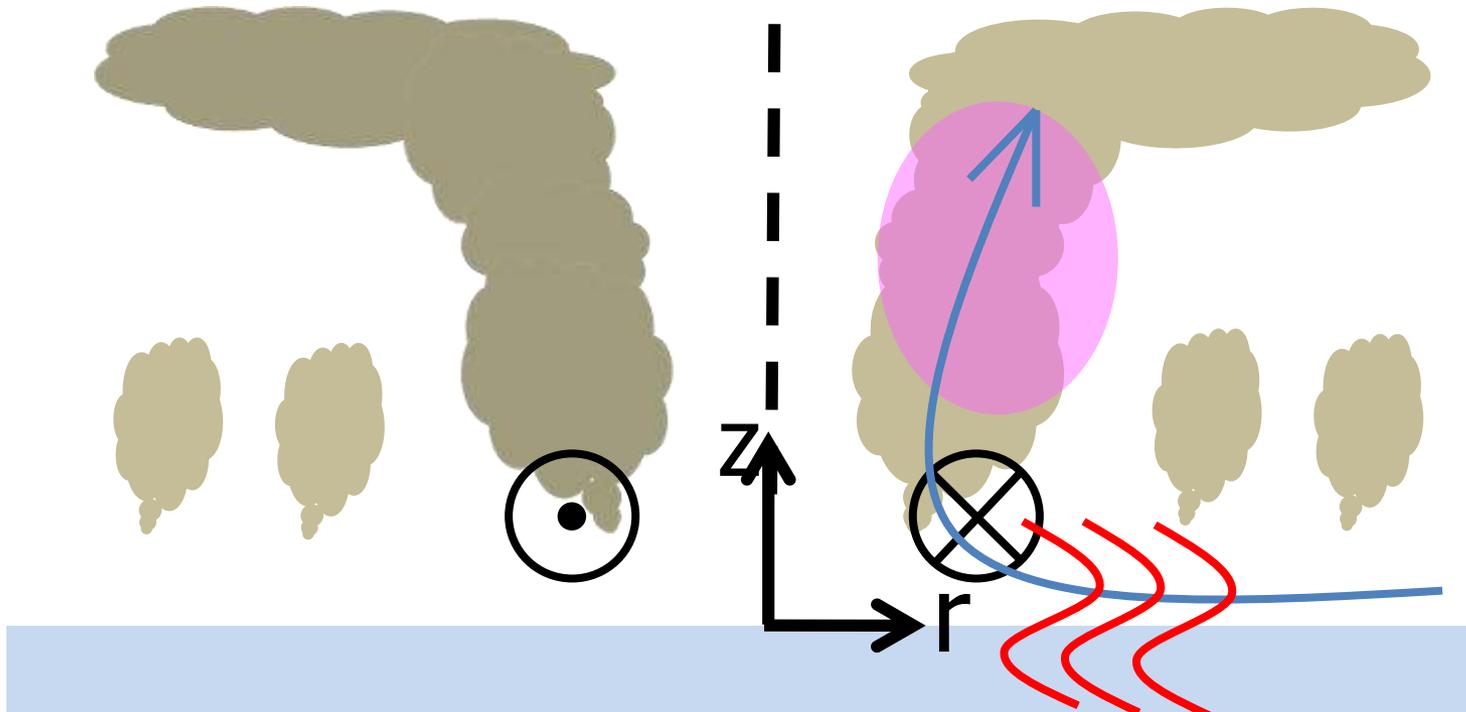
(Charney & Eliassen, 1964; Ooyama 1964)

- CISK: Conditional Instability of the Second Kind
 - 対流に伴う凝結熱
 - 湿った空気の台風スケールの摩擦収束
 - 対流活動の活発化



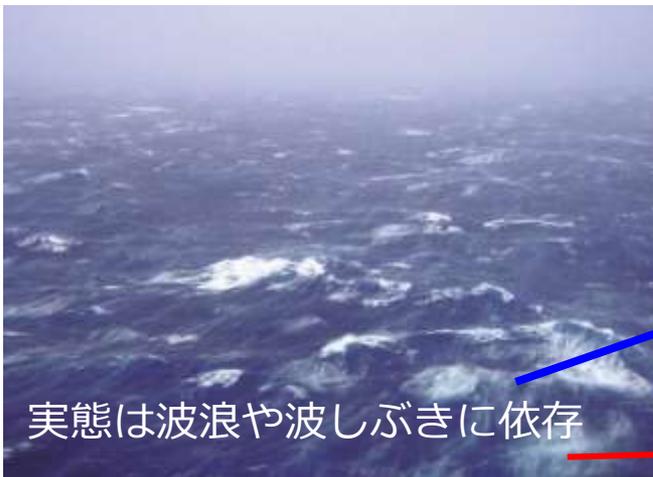
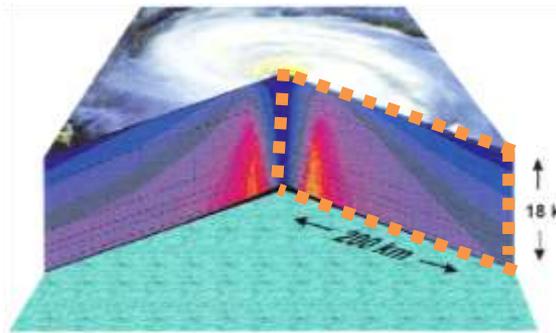
WISHE (Emanuel, 1986)

- WISHE: Wind Induced Surface Heat Exchange
 - 強風に伴う海面からの水蒸気及び顕熱供給が台風のエネルギーバランスにとって本質的と考えた
 - 台風をカルノーサイクルに近いものとして説明
 - 定常状態の台風強度の解析解を与えた
(のちに時間発展問題もWISHEに含めている)

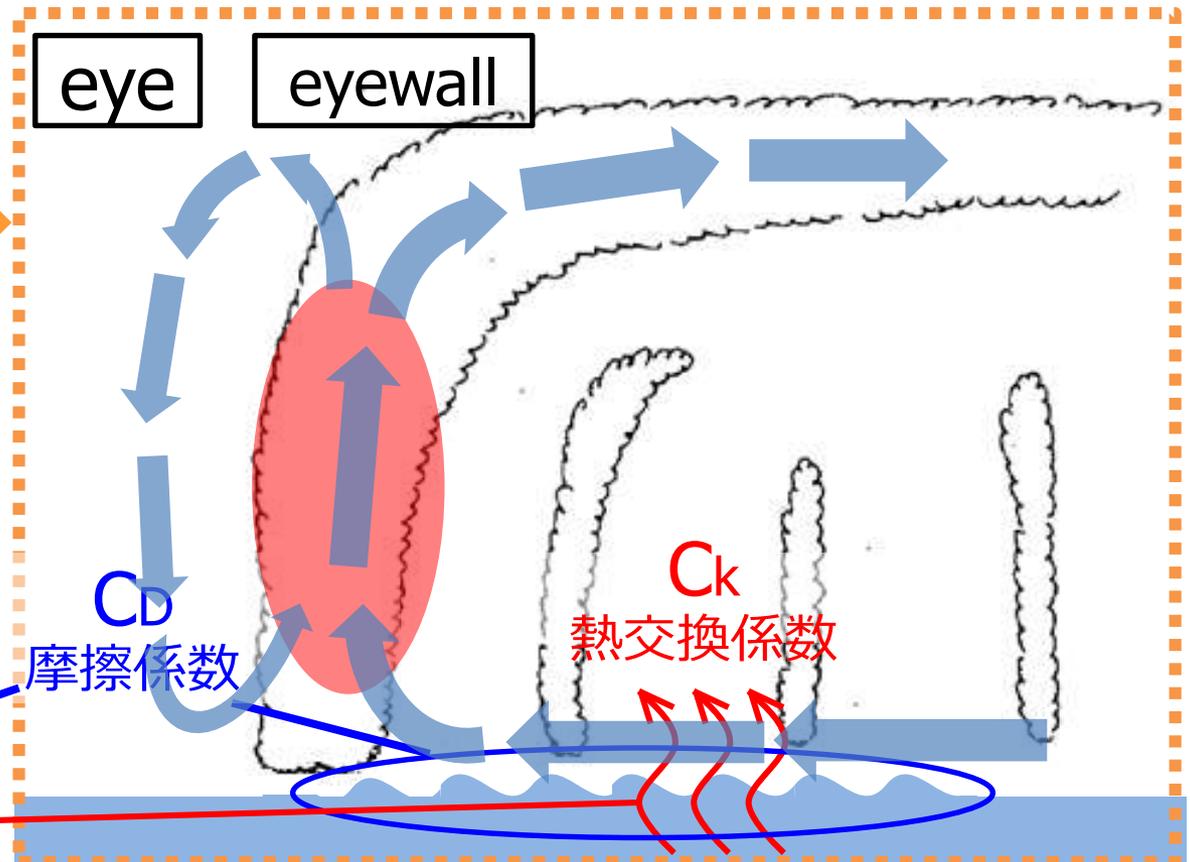


WISHEの結果として出てくるMPIの解釈 (MPI: Maximum Potential Intensity)

$$v^2 = \frac{C_k}{C_D} (T_b - T_{out}) (s_{SST}^* - s_b)$$



実態は波浪や波しぶきに依存



WISHE

Yano and Emanuel (1991) coined the term WISHE (wind-induced surface heat exchange) to denote the source of fluctuations in subcloud-layer entropy arising from fluctuations in surface wind speed. This can be an important source of energy for tropical disturbances (Emanuel 1987; Neelin *et al.* 1987; and Numaguti and Hayashi 1991. The latter two used the term ‘evaporation–wind feedback’ to characterize the same process).

(Emanuel *et al.*, 1994)

The Wind-Induced Surface Heat Exchange (WISHE) Model was originally proposed by Emanuel (1987; hereinafter E87) and independently by Neelin *et al.* (1987) as an alternative to the wave–CISK mechanism for explaining the 30–60-day oscillation. The acronym WISHE is intended to replace and unify the terms “air–sea interaction” used by E87 and “evaporation–wind feedback” used by Neelin *et al.* (1987).

(Yano and Emanuel, 1991)

Emanuel (1986), echoing the earlier work by Riehl and Kleinschmidt, proposed instead that “the intensification and maintenance of tropical cyclones depend *exclusively*¹ on self-induced heat transfer from the ocean,” arguing that ambient conditional instability plays essentially no role, with energy supplied exclusively by surface enthalpy fluxes. A key adjective in this formulation is “self-induced,” the idea being that the winds associated with the tropical cyclones drive the surface enthalpy fluxes that power it—a process that has since been called “wind-induced surface heat exchange” (WISHE).

(Zhang and Emanuel, 2016)

CISK

It is proposed that the cyclone develops by a kind of secondary instability in which existing cumulus convection is augmented in regions of low-level horizontal convergence and quenched in regions of low-level divergence. **The cumulus and cyclone-scale motions are thus to be regarded as cooperating rather than as competing—the clouds supplying latent heat energy to the cyclone,** and the cyclone supplying the fuel, in the form of moisture, to the clouds.

(Charney and Eliassen, 1964)

The model assumes that the large-scale hydrodynamical aspects of a tropical cyclone may be represented by an axisymmetric, quasi-balanced vortex in a stably stratified incompressible fluid, while the effects of moist convection may be formulated through the first law of thermodynamics applied to an implicit model of penetrative convective clouds. The air-sea exchange of angular momentum as well as latent and sensible heat is explicitly calculated in the model with the use of conventional approximations.

(Ooyama, 1969)

The present author views CISK in terms of the conceptual content that has grown and matured with advances in modeling work. Then, the spirit of CISK as the cooperative intensification theory is valid and alive. It is unfortunate, however, such a view of CISK does not seem to be shared by the majority of users of the acronym.

←大山先生はCharney and Eliassen (1964)やOoyama(1969)で考えた線形モデルでは、スケールの問題を解決できないと考えた。CISKの精神は数値計算の世界に生きている

(Ooyama, 1982)

伊藤の理解する“CISK”と“WISHE”の関係

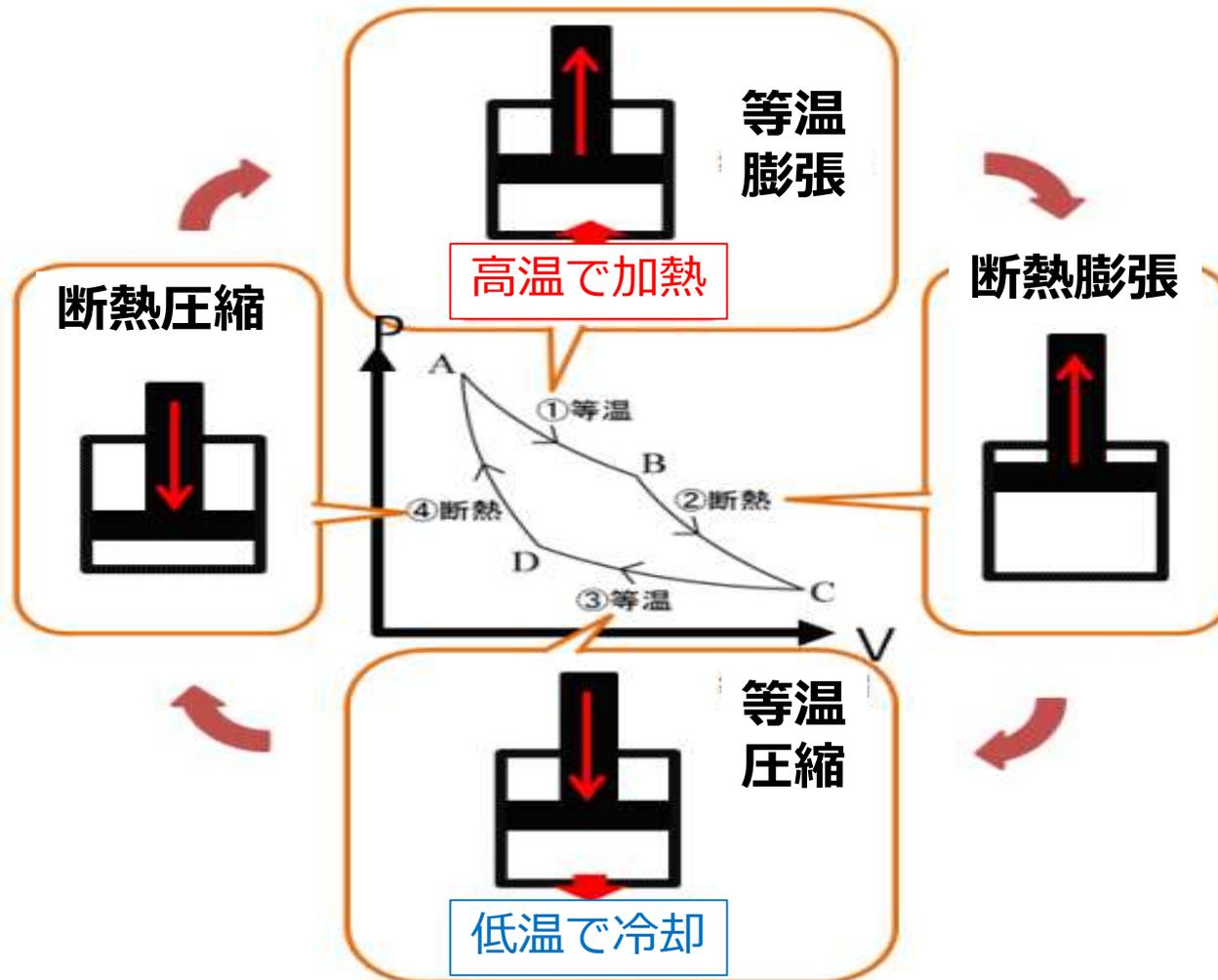
- 人によって定義が違う。
 - 台風研究者A
 - 大気環境場の不安定に起因するのがCISK、大気環境場を中立とみなし海面過程に起因するのがWISHE
 - 台風研究者A'
 - Aに似ているが、WISHEを海面過程が重要な定常状態にのみ適用し、Ooyama(1969)の数値計算で出てきた海面過程を含んだ発達をCooperative intensificationとみなす
 - 台風研究者B
 - 対流スケールと大規模な運動のスケールの相互作用に起因する場合、不安定の起源によらずCISKであり、WISHEはCISKに含まれる
 - 台風研究者C
 - 対流スケールと大規模な運動のスケールの相互作用がCISKの精神であることを認めつつ、相対的に大気を重視しているものをCISK, 海面過程を重視したものをWISHE

定常状態の台風を説明するWISHE理論 (Emanuel, 1986)

- 簡便な導出：定常状態における空気塊の状態変化が、熱力学的にカルノーサイクル「のような」経過をたどるとして最大風速を求める。
- 正式な導出：定常状態において、自由大気中の壁雲領域で傾度風平衡・静水圧平衡・傾斜湿潤対流に対する中立性を仮定し、境界層と外出流域を境界条件とみなすことで、最大風速・中心気圧・台風の構造を求める。

カルノーサイクルエンジン

- 気体に(1)高温で加熱→(2)断熱膨張で温度を下げる→(3)低温で冷却→(4)断熱圧縮で温度を上げる、という操作を施すと最大の熱効率で加熱と冷却の差が仕事に転化される



湿潤比エントロピー：パーセルの持つエネルギー

dk (エンタルピー)

- 湿潤比エントロピー $Tds_m = C_p dT + Ldq_v + gdz$
- B→CとD→Aは湿潤比エントロピーを変えないという意味で「断熱過程」 (B→Cで相変化が起こるがこれは Ldq_v が $C_p dT + gdz$ に変わること)

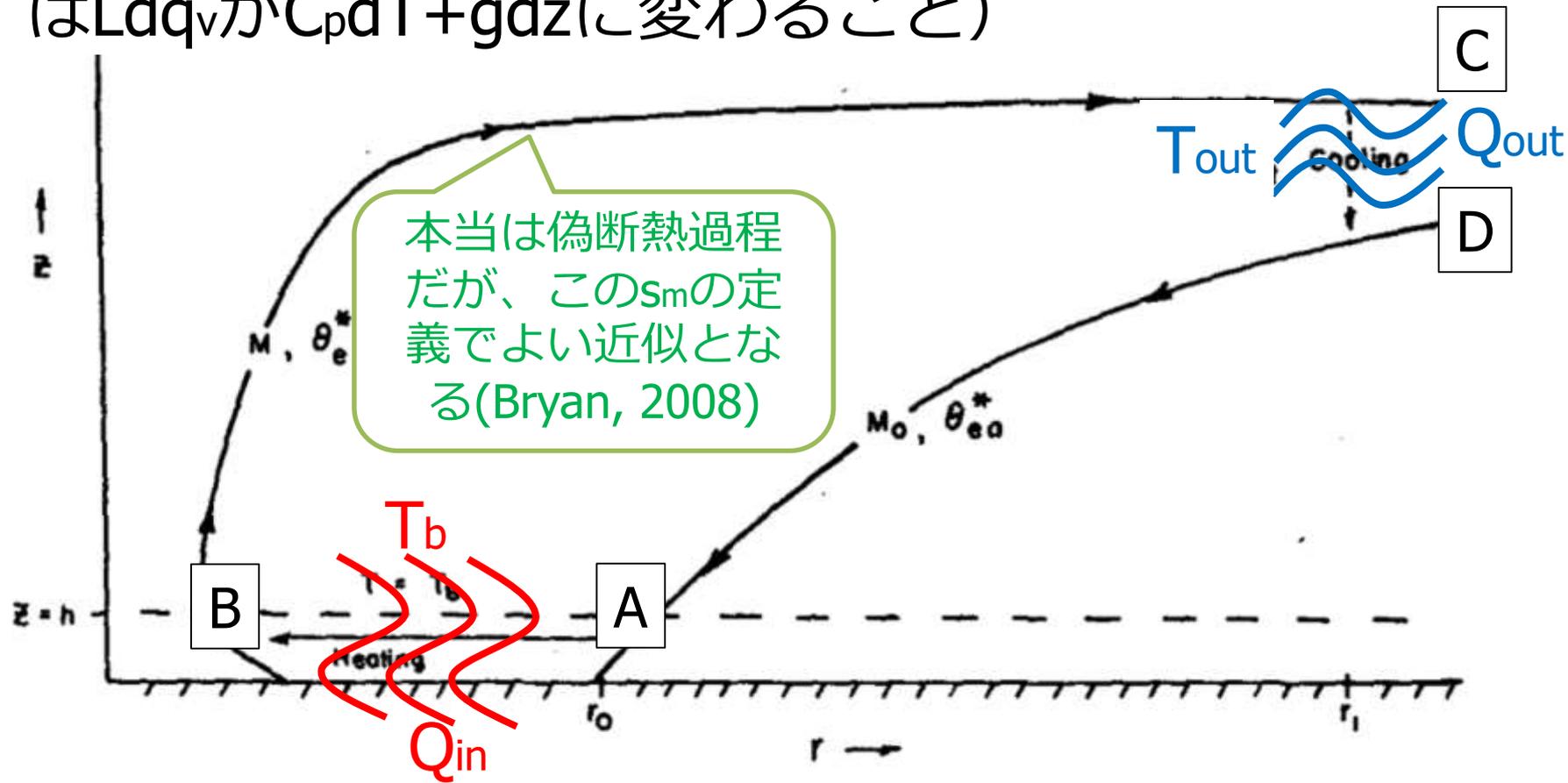


FIG. 13. The tropical cyclone as a Carnot heat engine. See text for explanation

カルノーサイクルエンジンとしての台風

- カルノーサイクルエンジンでは、「加熱」と「仕事」の比が暖かい部分と冷たい部分の温度だけで熱効率が決まる。

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = \frac{T_b - T_{out}}{T_b}$$

- 定常状態においては、仕事として得られる運動エネルギーが摩擦によって失われる分に等しいとして

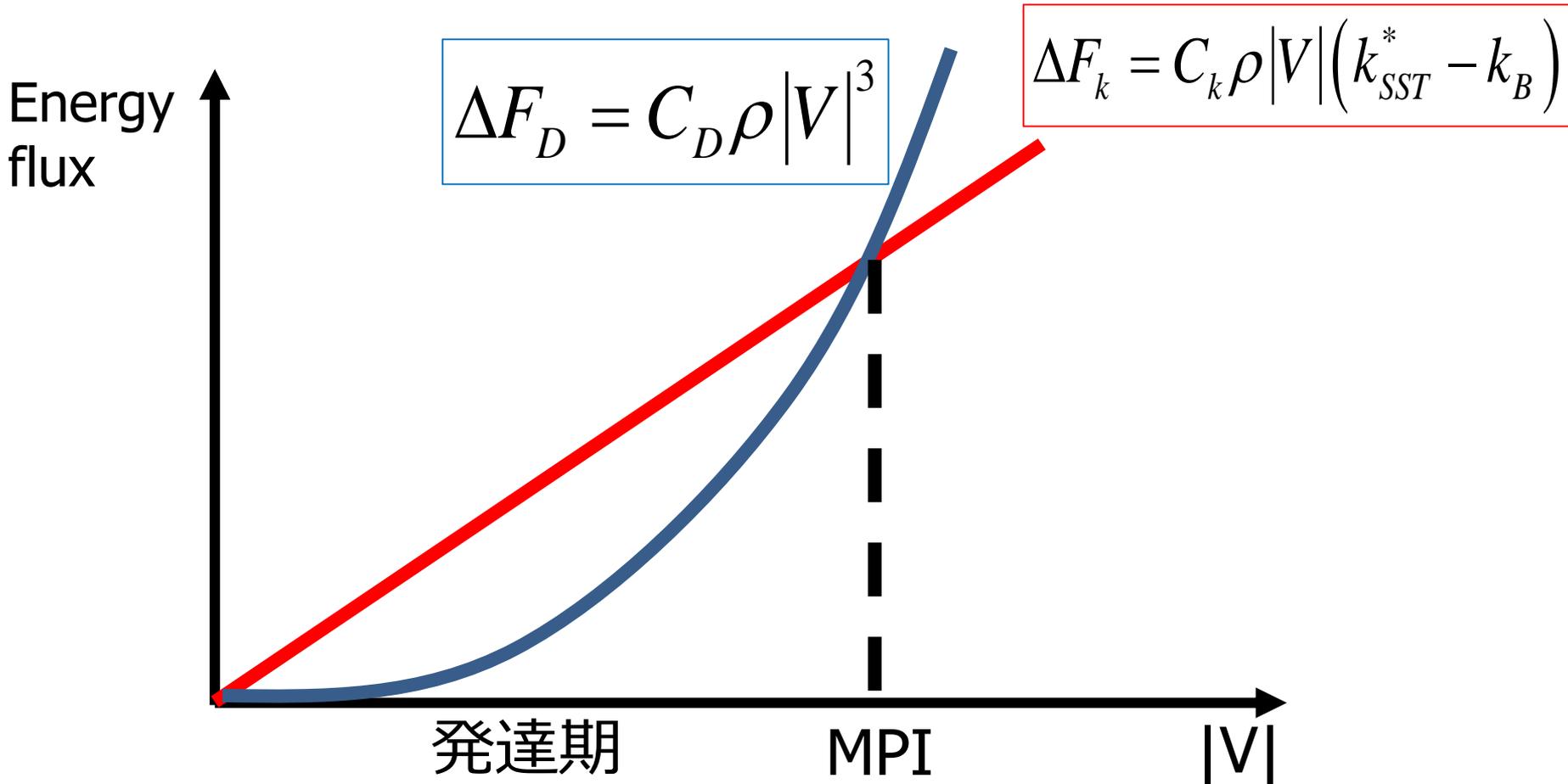
$$\frac{W}{Q_{in}} = \frac{\rho C_D v^3}{\rho C_k v (s_{m,sfc}^* - s_{m,b}) T_b}$$

- 上の2つの式を結び付けて

$$v^2 = \frac{C_k}{C_D} (s_{m,sfc}^* - s_{m,b}) (T_b - T_{out})$$

発達期と成熟期の台風 (Wang, 2012)

- 仕事に転化される熱エネルギーは風速に比例し、摩擦で大気が失うエネルギーは風速の3乗に比例。
- 風速が弱いとき摩擦も弱いので台風は発達できる。



正式なWISHEの定式化

- 以下、Emanuel(1986)をかいつまんで説明。
 - 自由大気
 - 傾度風平衡
 - 静水圧平衡
 - 傾斜湿潤対流に対する中立
(= 等M面と等 θ_e 面が平行)
 - 境界層
 - 鉛直1層のスラブモデルとして近似
 - 接線風は動径風に比べて十分に小さい
 - 湿度は一定。気温も一定。
- など

WISHEにおける自由大気のモデル化

内部コアの自由大気中では
気塊の運動に沿って
 M , θ_e , S_m が保存

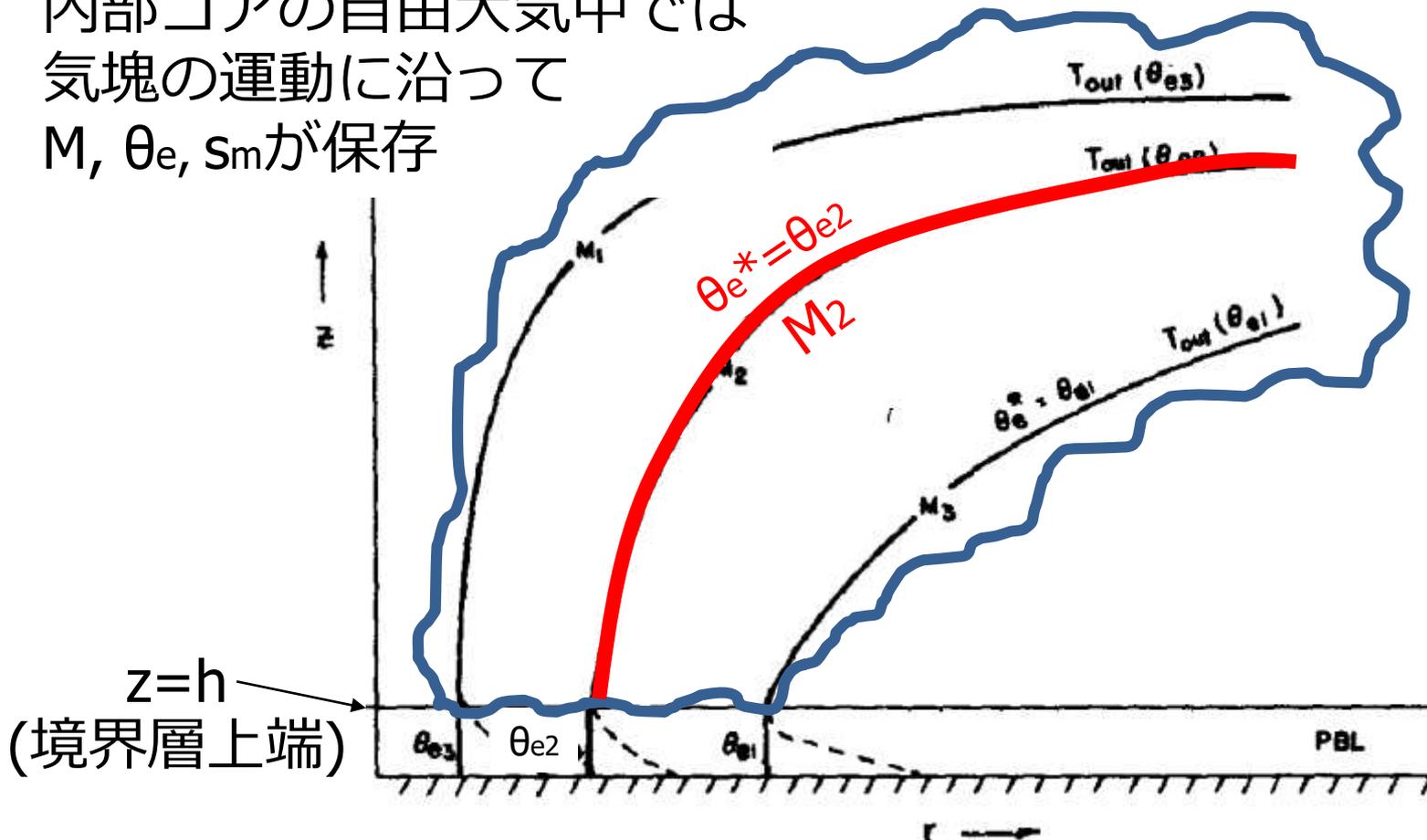


FIG. 1. Structure of the steady-state model. Curved lines above the planetary boundary layer (PBL) represent surfaces of constant angular momentum (M) and saturated equivalent potential temperature (θ_e^*). Solid lines in PBL show surfaces of constant θ_e while M is shown by dashed lines.

(Emanuel, 1986)

斜向(対称)不安定

- 鉛直方向の変位に関する安定性は成層安定度

$$N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

- 水平方向の変位に関する安定性は慣性安定度

$$I^2 = \frac{1}{r^3} \frac{\partial M^2}{\partial r}$$

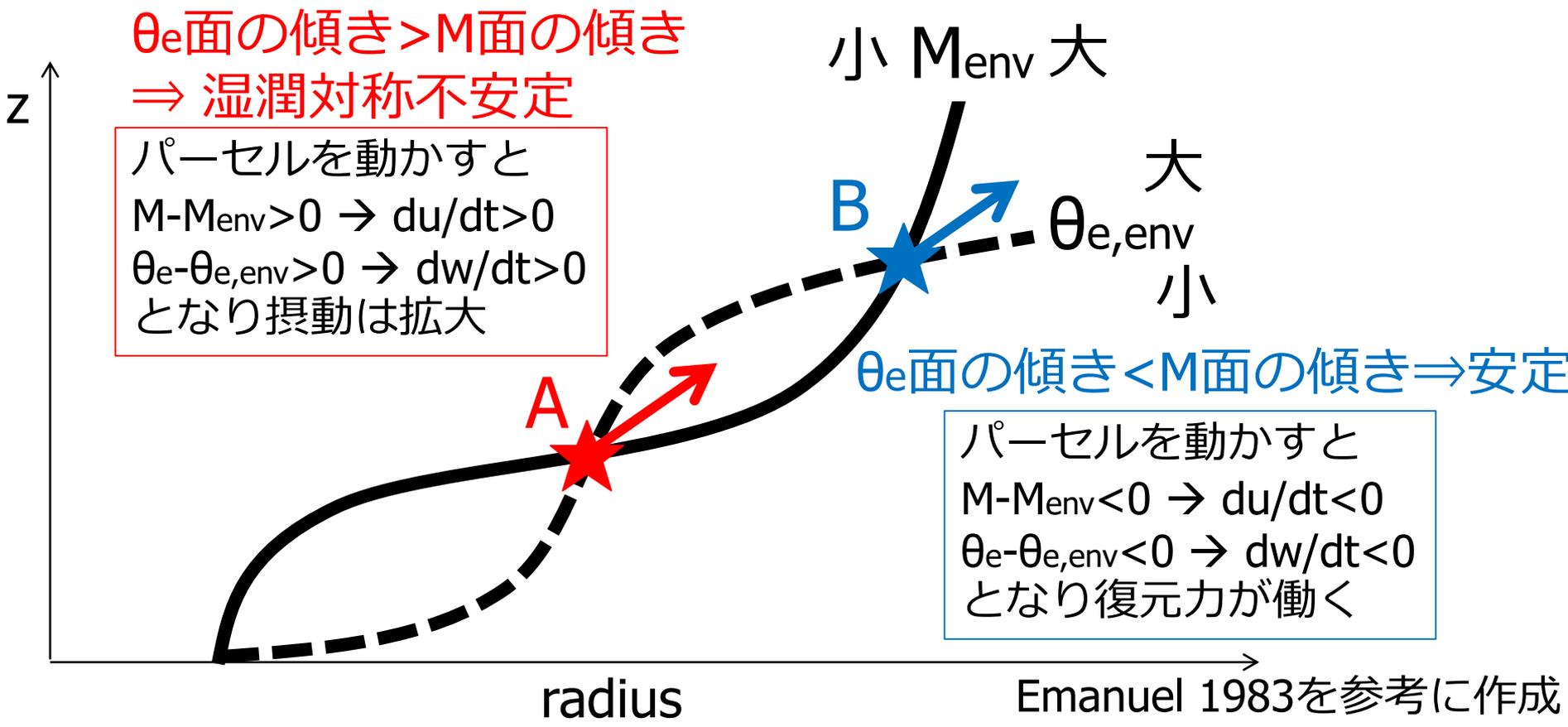
- 成層安定度と慣性安定度に関して、ともに安定であっても、斜向する変位に関して不安定ということがあり得る(斜向(対称)不安定)

湿潤斜向不安定 (傾斜湿潤対流に対する安定性)

- $\theta_{e,env}$ 面の傾き $>$ M_{env} 面の傾き \Rightarrow 斜向に対して摂動が増幅 (Emanuel, 1983; Schechter and Montgomery, 2007)。

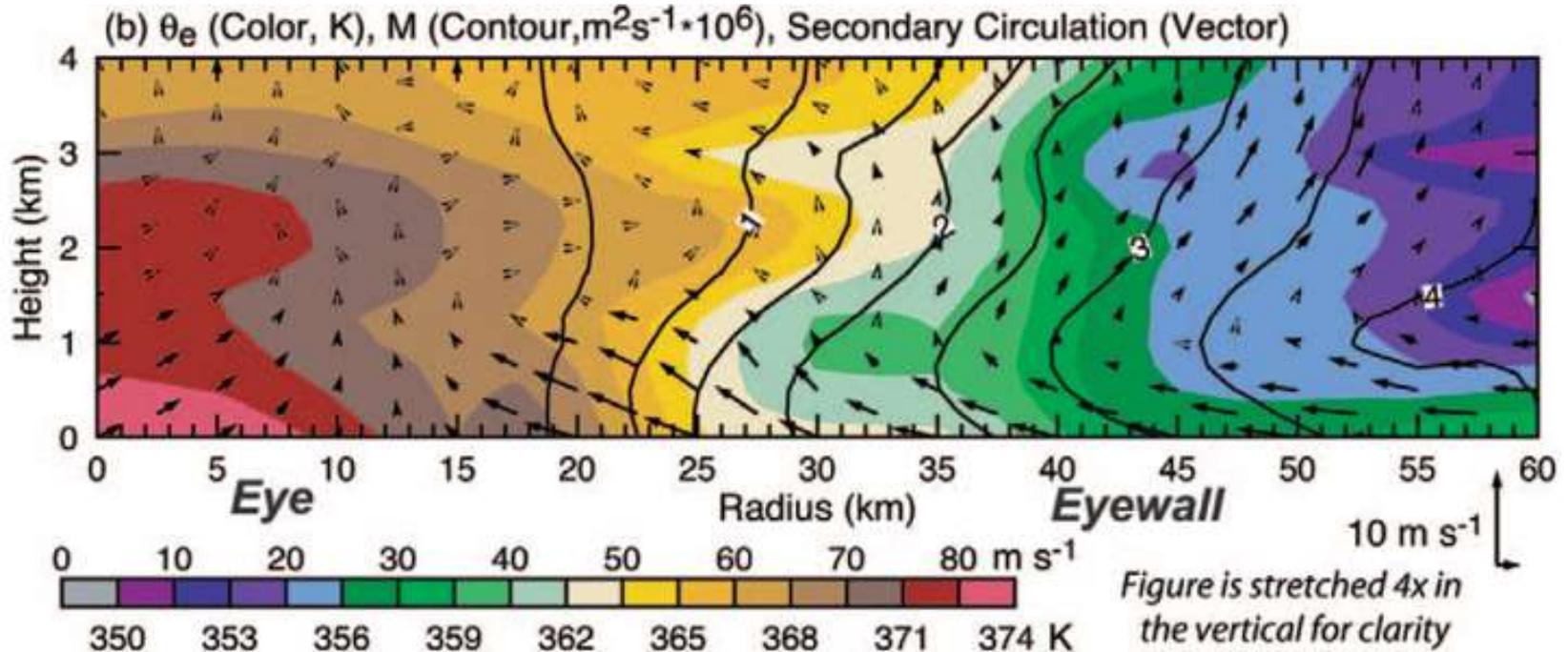
uとwの方程式($w > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) \left(\frac{M - M_{env}}{r} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{g}{\theta_{e0}} (\theta_e - \theta_{e,env})$$



傾斜湿潤対流平衡: 等 θ_e 面と等M面が平行

- 等 θ_e 面(=等 S_m 面)と等M面が平行であることは傾斜湿潤対流(湿潤斜向不安定の条件)に対して中立であることを意味している(Emanuel, 1983; Schechter and Montgomery, 2007)。
- 台風の発達の日時間スケール(～1day)が傾斜湿潤対流の日時間スケール(～1h)に比べて十分に長いから、台風の発達を考へる上では、不安定が解消されて中立だと想定している。



(Montgomery et al., 2006)

自由大気のモデル化

仮定1

$$\text{傾度風平衡 } \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_z = \frac{v^2}{r} + fr$$

仮定2

$$\text{静水圧平衡 } \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_r = -g$$

絶対角運動量の定義 $M = \frac{1}{2} fr^2 + rv$

$$\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_z = \frac{M^2}{r^3} - \frac{1}{4} f^2 r$$

座標変換

$$g \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)_r = -\alpha$$

偏微分の公式 $\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_z = - \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_r \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_p$

r で微分

$$g \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_p = \frac{M^2}{r^3} - \frac{1}{4} f^2 r$$

p で微分

温度-風関係

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial M^2}{\partial p} \right)_r = - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)_p$$

α を p, s_m の関数とみなす $\rightarrow \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)_p = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_m} \right)_p \left(\frac{\partial s_m}{\partial r} \right)_p \rightarrow$

温度-風関係

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial M^2}{\partial p} \right)_r = - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_m} \right)_p \left(\frac{\partial s_m}{\partial r} \right)_p$$

湿潤比エントロピーの定義

$$T \delta s_m = C_p \delta T + L \delta q_v - \alpha \delta p$$

湿潤比エンタルピーの定義

$$\delta k_m = C_p \delta T + L \delta q_v = T \delta s_m + \alpha \delta p$$

$$\left(\frac{\partial k_m}{\partial p} \right)_{s_m} = \alpha, \left(\frac{\partial k_m}{\partial s_m} \right)_p = T$$

熱力学におけるMaxwellの関係式

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_m} \right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s_m}$$

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial M^2}{\partial p} \right)_r = - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s_m} \right)_p \left(\frac{\partial s_m}{\partial r} \right)_p$$

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial M^2}{\partial p} \right)_r = - \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s_m} \left(\frac{\partial s_m}{\partial r} \right)_p$$

偏微分の公式 $\left(\frac{\partial M}{\partial p} \right)_r + \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_p \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_M = 0$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_r \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_p = \frac{r^3}{2M} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s_m} \left(\frac{\partial s_m}{\partial r} \right)_p$$

仮定3

$$\text{等M面と等s}_m\text{面が平行} \left(\frac{\partial s_m}{\partial r} \right)_p = \frac{ds_m}{dM} \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_p$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_M = \frac{r^3}{2M} \frac{ds_m}{dM} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s_m}$$

壁雲を通るある気塊のトラジェクトリについて、境界層上端から外出流までをM(s_m)に沿って、

pで積分して整理。 $r_{out} \gg r_b$ であるとする。

仮定4

壁雲を通る気塊に当てはまる関係式

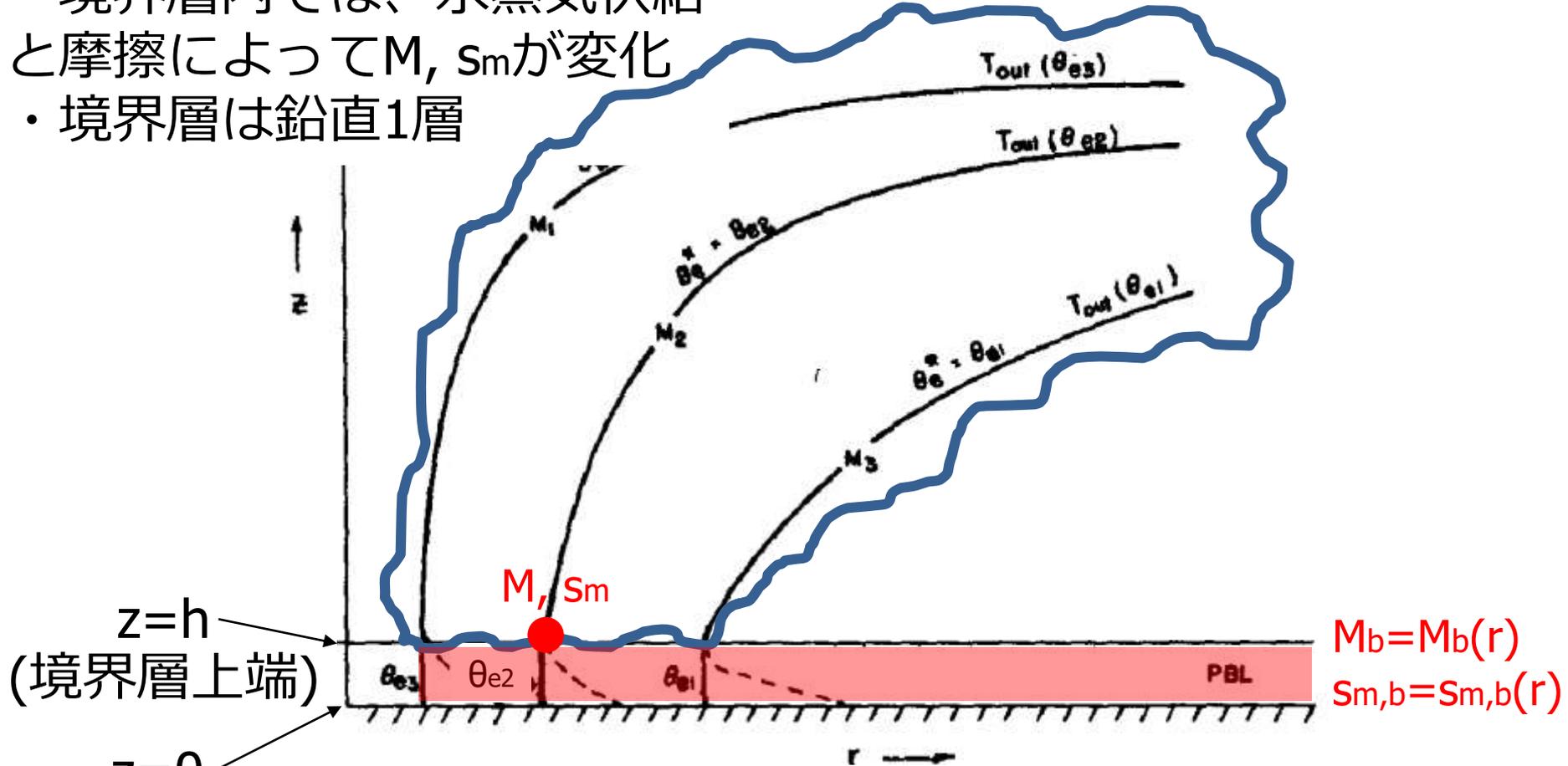
$$v^2 = -M \frac{ds_m}{dM} (T_b - T_{out})$$

$$v^2 = -M \frac{ds_m}{dM} (T_b - T_{out}) = -M \frac{(ds_m / dr)}{(dM / dr)} (T_b - T_{out}) \text{ の解釈}$$

- 中心と外側の相当温位勾配 ds_m / dr が大きいほど、接線風速は強くなる。
(中心付近が暖かく湿っている)
- 中心と外側の絶対角運動量勾配 dM / dr がゆるいほど、接線風速は強くなる。
(大きい絶対角運動量が中心付近まで輸送されている)
- 外出流の気温 T_{out} が低いほど接線風速は強くなる。

境界層のモデル化(境界層上端における ds_m/dM)

- 境界層内では、水蒸気供給と摩擦によって M , s_m が変化
- 境界層は鉛直1層



$$M_b = M_b(r)$$

$$S_{m,b} = S_{m,b}(r)$$

1. Structure of the steady-state model. Curved lines above the ry boundary layer (PBL) represent surfaces of constant angular momentum (M) and saturated equivalent potential temperature (θ^*). Solid lines in PBL show surfaces of constant θ_e while M is shown by dashed lines.

(Emanuel, 1986)

境界層のモデル化(境界層上端における ds_m/dM)

鉛直1層としたときのMと s_m の方程式(上端で上昇流を仮定)
(Smith et al. 2008を一部改変)

$$\frac{u_b}{r} \frac{dM_b}{dr} = \underbrace{\frac{w_c}{h} (v_b - v)}_{\text{自由大気との乱流混合}} - \underbrace{\frac{C_D}{h} (v_b^2 + v_b^2)^{1/2} v_b}_{\text{海面摩擦}}$$

自由大気との乱流混合

海面摩擦

$$u_b \frac{ds_{m,b}}{dr} = \underbrace{\frac{w_c}{h} (s_{m,b} - s_{m,free})}_{\text{自由大気との乱流混合}} + \underbrace{\frac{C_k}{h} (v_b^2 + v_b^2)^{1/2} (s_{m.sfc}^* - s_{m,b})}_{\text{海面からの水蒸気・顕熱供給}} + \underbrace{\dot{Q}}_{\text{放射などの熱源}}$$

自由大気との乱流混合

海面からの水蒸気・顕熱供給

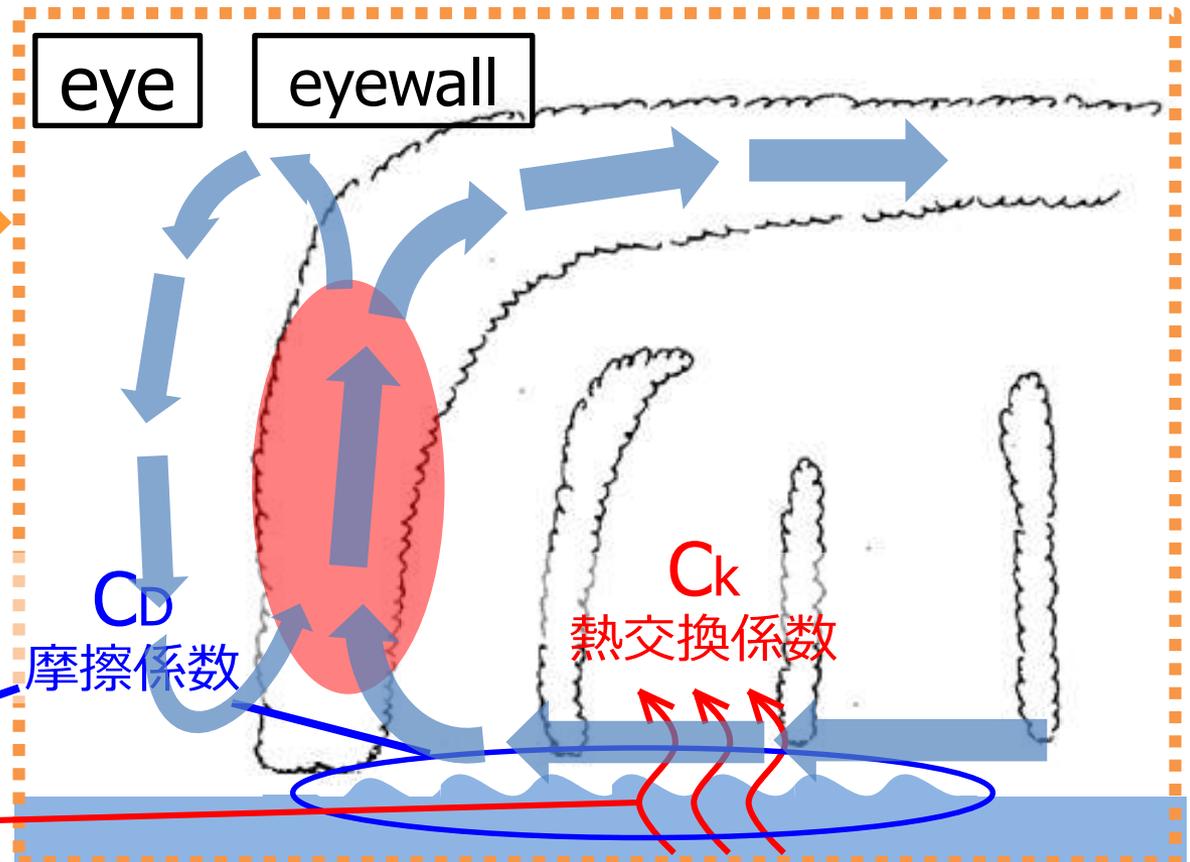
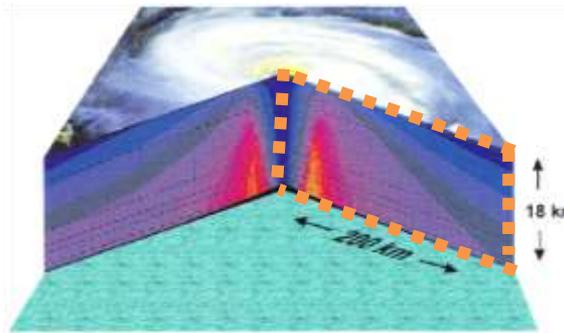
放射などの熱源

$$-\frac{ds_m}{dM} \approx -\frac{ds_{m,b}}{dM_b} = \frac{ds_{m,b}/dr}{dM_b/dr} = \frac{1}{M_b} \frac{C_k}{C_D} (s_{m.sfc}^* - s_{m,b})$$

$$v^2 = \frac{C_k}{C_D} (s_{m.sfc}^* - s_{m,b}) (T_b - T_{out}) = \frac{T_b - T_{out}}{T_b} \frac{C_k}{C_D} (k_{m.sfc}^* - k_{m,b})$$

Part 2: MPIを解釈する

$$v^2 = \frac{C_k}{C_D} (T_b - T_{out}) (s_{SST}^* - s_b)$$



おまけスライド

湿潤斜向不安定

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) \left(\frac{M - M_{env}}{r} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M - M_{env}}{r} \right) = - \left(f + \bar{\zeta} \right) u$$

- なので結局、時間スケールは $2\pi/I$ になる。

おまけ：超傾度風(傾度風平衡からの偏差)

- 軸対称モデルでは、最大接線風速は壁雲近傍の下層に現れ、傾度風平衡から期待される値よりも大きい(超傾度風)。
- 壁雲近傍で吹き込みが止まったところに対応する。

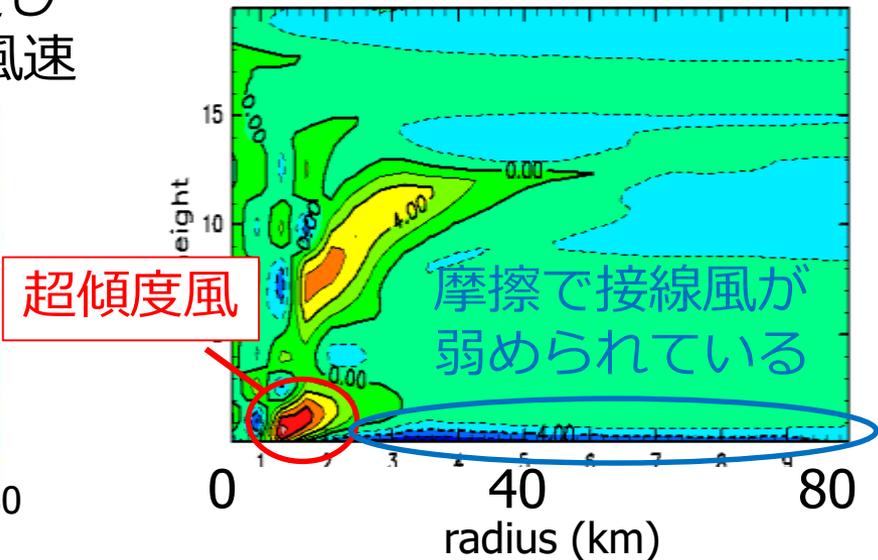
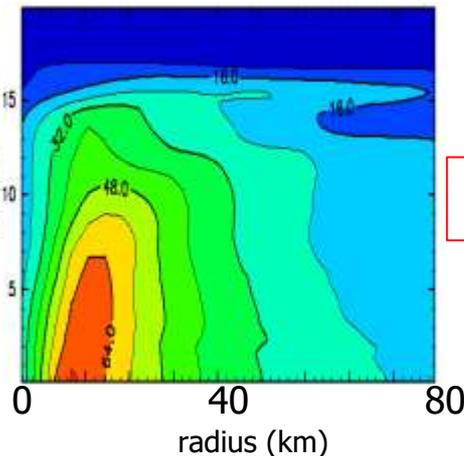
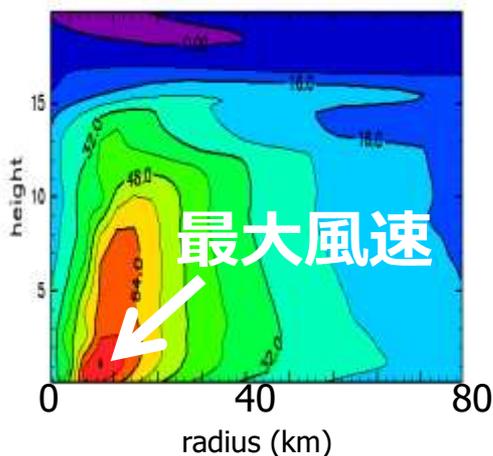
$$\underbrace{\frac{Du}{Dt}}_A - \underbrace{\frac{v^2}{r}}_B - \underbrace{fv}_C = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}_D + \underbrace{F_r}_E$$

- 観測にも見られる(光田1988, Montgomery et al. 2006)

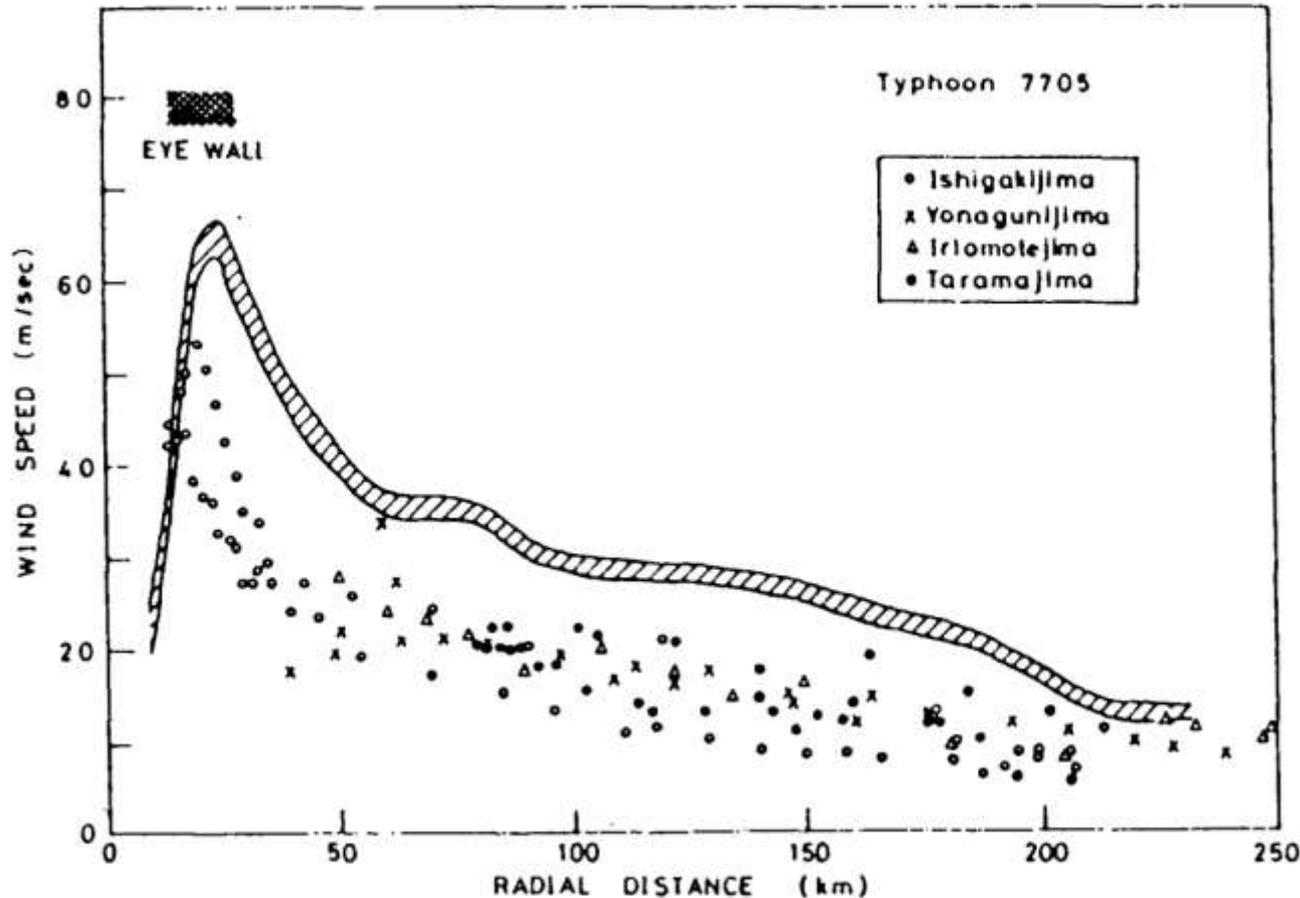
(a)接線風速

(b)傾度風平衡を仮定し
気圧から求めた接線風速

(c) (a)から(b)を引いたもの

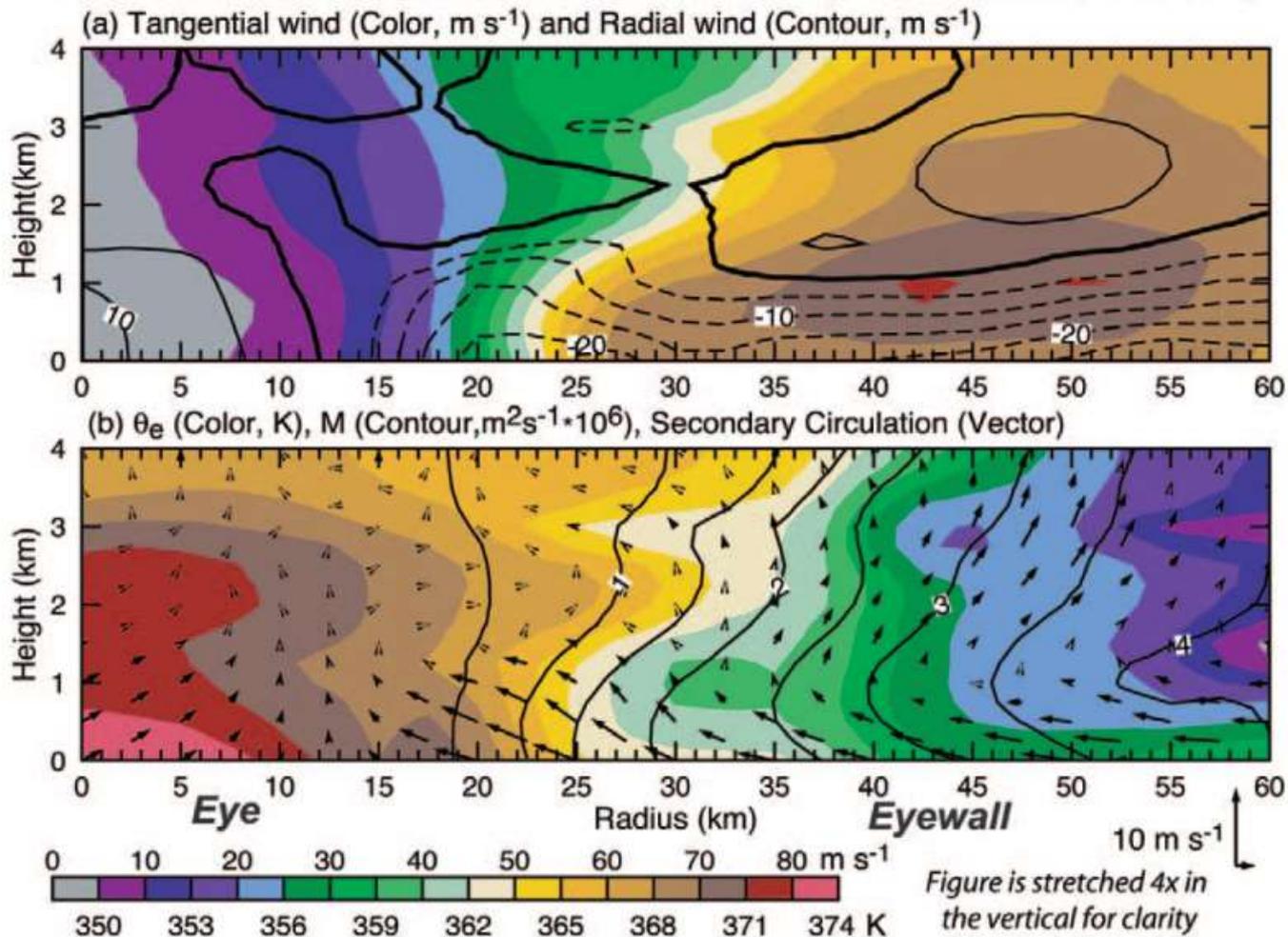


Mitsuta (1988, JMSJ)



超傾度風と最大風速

- 接線風速の最大値($r=42.5\text{km}$, $z=1\text{km}$)はほぼ動径風速がゼロの地点に現れる。



湿潤PVを使った解釈(Emanuel, 1986)

- 絶対渦度ベクトルと絶対角運動量面は平行(証明済)。

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla M = 0$$

- 湿潤PVなる量を定義する

$$q_e = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \theta_e}{\rho}$$

- 傾斜湿潤対流に対する中立性は絶対角運動量面と相当温位面が平行であることを意味するので、結局、

$$q_e = 0$$

- 壁雲の中では湿度100%、傾度風平衡・静水圧平衡を仮定すると、inversionにより、境界条件から流れ場が復元できる (=台風内部コアは境界条件で決まる) (?)

いくつかの熱力学に関する法則

- クラウジウス-クラペイロンの法則

$$\frac{de_s}{e_s} = \frac{L}{R_v T^2} dT$$

- キルヒホフの法則

$$dL = (C_{pv} - C_w) dT$$

- 偽断熱過程：水蒸気が液体になったら取り去られるとする過程。対流雲などではよい近似になるものと想定される。不可逆的。

いろいろな「相当温位」

- 通常、以下の前提を踏まえている
 - 過飽和は起きていないとする
 - すべての相の水物質は平衡状態にあるとする
 - 凝結した水物質の扱いについて主に2種類
 - 空気塊とともに存在する(降水なし)
shallowでは適切であり、可逆的な過程である。
 - 凝結したら取り去られる(降水あり；偽断熱過程)
convective cloudsでは適切であり、非可逆的な過程である。
- Iribarne and Godson (1973)
 - 降水のない雲に対して正確な表現
- Bolton (1980)
 - 降水のある雲に対して適切であるが、経験式による回帰で係数を決めているため、理論的な考察には向かない。
- Bryan (2008)
 - 上記2つのレビューと降水のある雲に対する近似的理論式

飽和相当温位の導出(吉崎・加藤「豪雨・豪雪の気象学」)

- 偽断熱過程を考え、湿潤気体の熱力学第一法則

(1kgあたりの) 非断熱加熱率 Q 飽和水蒸気
混合比 q_v^*

$$Q = \left(C_{pd} + q_v^* C_{pv} \right) \frac{DT}{Dt} - \frac{R_d T}{p - e_s} \frac{D(p - e_s)}{Dt} - \frac{q_v^* R_v T}{e_s} \frac{De_s}{Dt}$$

非断熱加熱が凝結だけ ($Q = -L(Dq_v^*/Dt)$) だとすると
Clausius-Clapeyronの式とKirchhoffの式を使って、

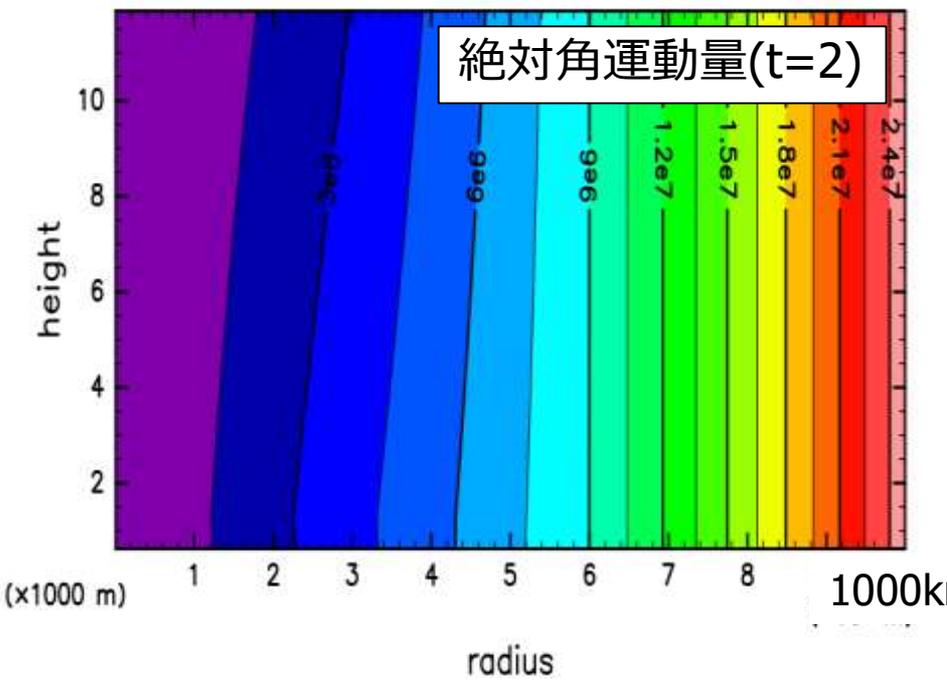
$$\frac{C_{pd} + q_v^* C_w}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R_d}{p - e_s} \frac{D(p - e_s)}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{Lq_v^*}{T} \right) = 0$$

また、 $C_{pd} + q_v^* C_w \approx C_{pd}$ とすると

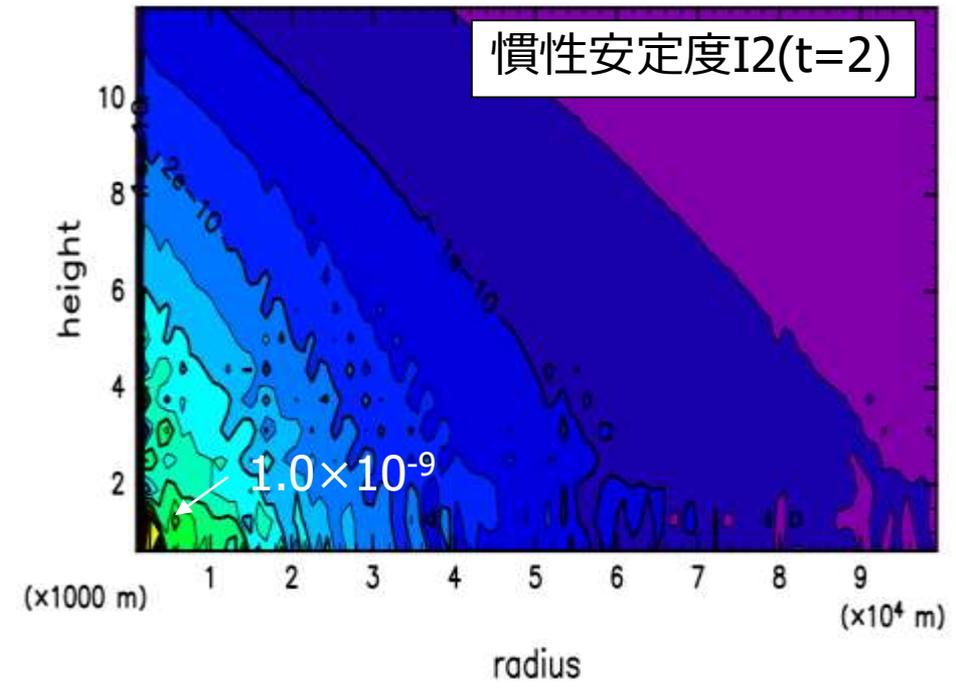
$$\theta_e^* = T \left(\frac{p_0}{p - e} \right)^{R_d/C_{pd}} \exp \left(\frac{Lq_v^*}{C_{pd} T} \right) = \theta \exp \left(\frac{Lq_v^*}{C_{pd} T} \right) = \text{const.}$$

θ_e^* を **飽和相当温位** と呼ぶ。未飽和湿潤気体に関し、
Tを露点温度に置き換えたものを **相当温位** と呼ぶ。

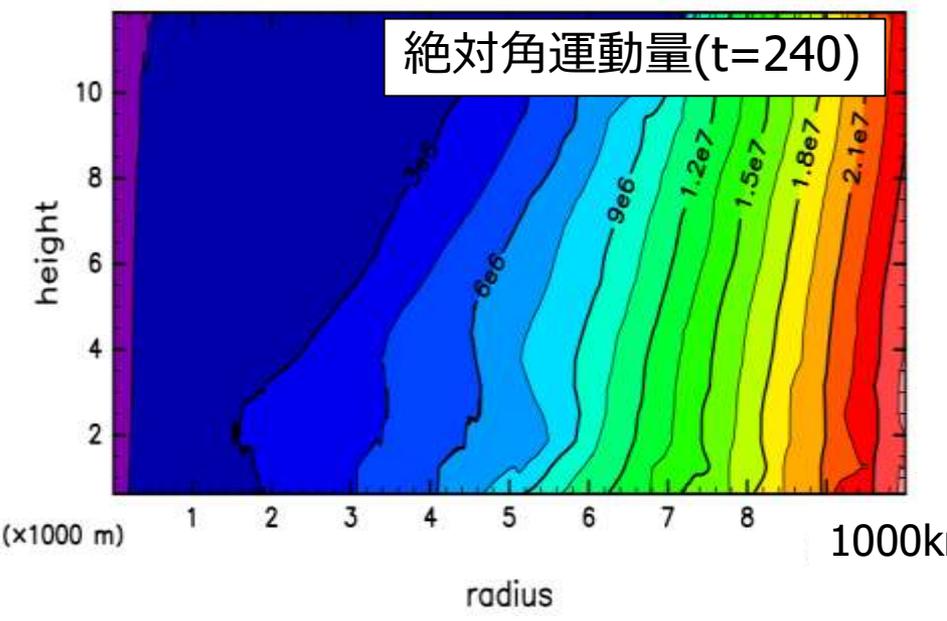
絶対角運動量(t=2)



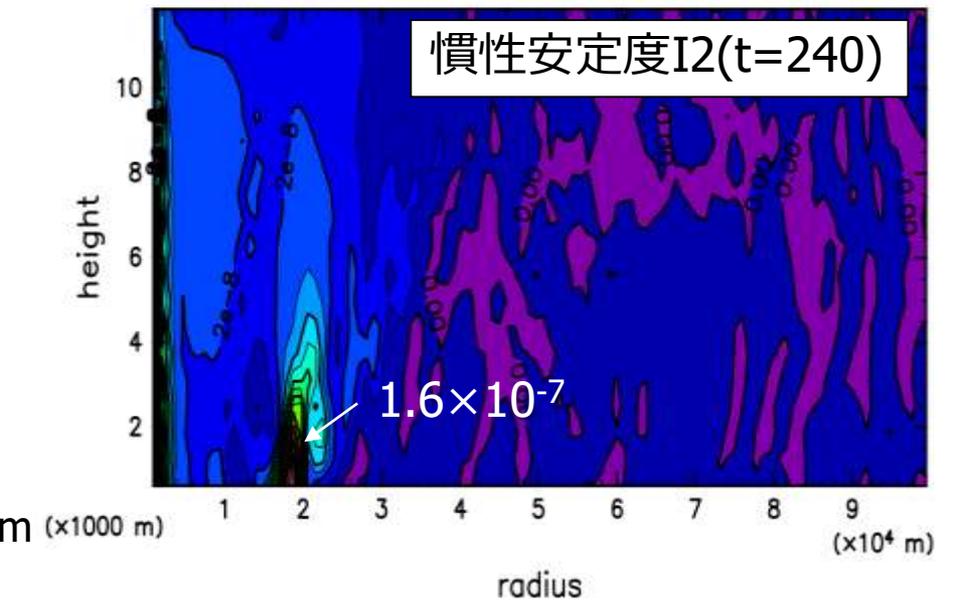
慣性安定度I2(t=2)



絶対角運動量(t=240)



慣性安定度I2(t=240)



温度-風関係 $\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{g}{\bar{T}}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial r}\right)_p$ の導出

$$\text{傾度風平衡} \quad \frac{\bar{v}^2}{r} + f\bar{v} = \frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z$$

z で微分 & r と z の偏微分の順序を入れ替え \rightarrow ↓

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r$$

静水圧平衡 $\partial\bar{p}/\partial z = -\bar{\rho}g \rightarrow$ ↓

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z - \frac{g}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z$$

$\partial\bar{p}/\partial z = -\bar{\rho}g \rightarrow$ ↓

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z$$

整理 →

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z - \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\frac{(\partial\bar{p}/\partial r)_z}{(\partial\bar{p}/\partial z)_r}\right)$$

$\delta\bar{p} = \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z \delta r + \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r \delta z$ で $\delta\bar{p} = 0$ (\bar{p} が一定)として δr で割る $\rightarrow \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_p = 0 \rightarrow$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p\right)$$

$\delta\bar{\rho} = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p \delta r + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial p}\right)_r \delta p = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z \delta r + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r \delta z$ で $\delta p = 0$ (p が一定)として δr で割る

$\rightarrow \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p \rightarrow$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p$$

$$\bar{p} = \bar{\rho}RT\bar{T}$$

←微小変化の計算

$$\delta\bar{p} = R\bar{T}\delta\bar{\rho} + R\bar{\rho}\delta\bar{T}$$

← $\delta\bar{p} = 0$ (\bar{p} が一定)として $\bar{\rho}RT\bar{T}$ で割る

$$\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{T}}\right)_p = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{T}}$$

$$\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{T}}\right)_p \left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial r}\right)_p$$

← $\delta p = 0$ として $\delta\bar{T}$ で割る

$$\delta\bar{\rho} = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{T}}\right)_p \delta\bar{T} + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial p}\right)_{\bar{T}} \delta p$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p$$

$$\partial\bar{p} / \partial z = -\bar{\rho}g \rightarrow$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{g}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{g}{\bar{T}}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial r}\right)_p$$

自由表面を持つ流体を考え 調節過程について調べる

$$\frac{Du}{Dt} - \left(f + \frac{v}{r} \right) v = -g \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad \frac{Dv}{Dt} + \left(f + \frac{v}{r} \right) u = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{H}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} = 0,$$

- 簡単のため、基本場が剛体回転の状態を考える。
- 基本場（傾度風平衡）と偏差成分(水平風速及び自由表面の変位)に分ける。
- 積分変換（ハンケル変換）を施し、波数kの空間で解析解を得て、最終状態を計算すると、

↓
(次のスライドに続く)

$$\hat{v} = \frac{1}{\mu^2} \left\{ -\frac{gk}{f + \bar{\zeta}_a} \hat{\eta}_0 + \frac{gHk^2}{(f + \bar{\zeta}_a)^2} \hat{v}_0 \right\}$$

$$\hat{\eta} = \frac{1}{\mu^2} \left(\hat{\eta}_0 - \frac{Hk}{f + \bar{\zeta}_a} \hat{v}_0 \right) \quad \text{ただし、} \mu = \sqrt{1 + gHk^2 / (f + \bar{\zeta}_a)^2}$$

特別な場合を考える。

$$\begin{aligned}
 l = 1/k \ll \sqrt{gH / I} \quad & \text{ならば} \quad \hat{v} \rightarrow \hat{v}_0 & \hat{\eta} & \rightarrow \sqrt{H / g} \hat{v}_0 \\
 l = 1/k \gg \sqrt{gH / I} \quad & \text{ならば} \quad \hat{v} \rightarrow \sqrt{g / H} \hat{\eta}_0 & \hat{\eta} & \rightarrow \hat{\eta}_0 \\
 l = 1/k = \sqrt{gH / I} \quad & \text{ならば} \quad \hat{v} = \frac{1}{2} (\hat{v}_\eta + \hat{v}_0) & \hat{\eta} & = \frac{1}{2} (\hat{\eta}_0 + \hat{\eta}_v) \\
 & & & (\hat{v}_\eta \equiv \sqrt{g / H} \hat{\eta}_0, \hat{\eta}_v \equiv \sqrt{H / g} \hat{v}_0)
 \end{aligned}$$

「ロスビーの変形半径」 $l \doteq \sqrt{gH / I}$ よりも

スケールが小さければ、風速場の変位に調節される。

スケールが大きければ、質量場の変位に調節される。

渦度と絶対角運動量の関係

- 軸対称系における絶対渦度ベクトル

$$\boldsymbol{\omega} = \left(-\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, f + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right)$$

- 絶対角運動量の方向微分

$$\nabla M = \nabla \left(\frac{1}{2} fr^2 + rv \right) = \left(fr + v + r \frac{\partial v}{\partial r}, 0, r \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

- 両者の内積はゼロ $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla M = 0$

⇒等絶対角運動量面と絶対渦度ベクトルは平行

⇒等絶対角運動量面に沿った向き(変換後のZ軸)は絶対渦度ベクトルの主軸の向きとなっている

- ここで使われた渦位 $q = \frac{g}{f\theta_0} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho} = \frac{g}{f\theta_0} \frac{f + \zeta}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial Z}$
(回転軸方向の成層安定度×渦度)