

Part 6 台風予測に適した データ同化手法

このPartの内容

- データ同化：数値モデル結果（背景値）と観測値を組み合わせた同化結果を作る
- まずは時間変化がない問題を考える。
 - 1つの物理量がモデルによって得られ、それに対応する観測値が得られた
 - 2つの物理量がモデルによって得られ、そのうち1つに対応する観測が得られた
- 線形・正規分布の仮定
 - ⇒原理的には4D-VarとEnKFは同じ解を与える。
 - ⇒解の解釈：観測値の情報が物理場の不安定モードと組み合わせられて同化結果を生む
- 伊藤のデータ同化研究(海面過程最適化、Hybrid化)

1つ目の問題について考える

質問「現在の気温は何℃ですか？」

21℃くらいではないでしょうか？

観測さん $21.0 \pm 2.0^{\circ}\text{C}$

モデルさん $24.0 \pm 5.0^{\circ}\text{C}$

24℃くらいじゃないですか？？？

観測とモデル結果の両方に誤差がある。

⇒そもそもここで出てきた ± 2.0 や ± 5.0 の意味は？

誤差とは何か？

↓より正確にはモデル空間の真の状態

- 不可知な真の気温 T_t が存在すると仮定
- モデルに基づく気温 T_b との差を $\varepsilon_b = T_b - T_t$
- 観測された気温 T_o との差を $\varepsilon_o = T_o - T_t$
- ε_b や ε_o を誤差と呼ぶが、これらは不可知。
- 全く同じ状況で複数回観測できたとすると、観測誤差の標準偏差 σ_o を推定できる。

$$\sigma_o^2 = \left\langle \varepsilon_o^2 \right\rangle \quad (< > \text{は期待値})$$

- 同様にアンサンブルシミュレーションなどにより σ_b を推定することもできる。
- σ_b^2 は背景誤差分散、 σ_o^2 は観測誤差分散、
 σ_b (σ_o) は背景(観測)誤差標準偏差(単に誤差とも)

同化結果とは何か？

以下の条件を満たすものを同化結果(解析)とする

- (1) モデル結果と観測の線形和
- (2) (1)のうち誤差標準偏差が最も小さいもの

$$T_a = (1-\alpha)T_b + \alpha T_o = T_b + \alpha(T_o - T_b)$$

↓ 両辺から T_t を引く。

$$\boxed{T_a - T_t} = (1-\alpha) \boxed{T_b - T_t} + \alpha \boxed{T_o - T_t}$$

$= \varepsilon_a$ $= \varepsilon_b$ $= \varepsilon_o$

↓ 2 乗して期待値をとる。

$$\boxed{\langle \varepsilon_a^2 \rangle} = (1-\alpha)^2 \boxed{\langle \varepsilon_b^2 \rangle} + \alpha^2 \boxed{\langle \varepsilon_o^2 \rangle} + \cancel{2\alpha(1-\alpha) \langle \varepsilon_o \varepsilon_b \rangle}$$

$= \sigma_a^2$ $= \sigma_b^2$ $= \sigma_o^2$

観測誤差とモデル結果
の誤差が無相関なら0

$$\text{同化結果} : T_a = (1-\alpha)T_b + \alpha T_o$$

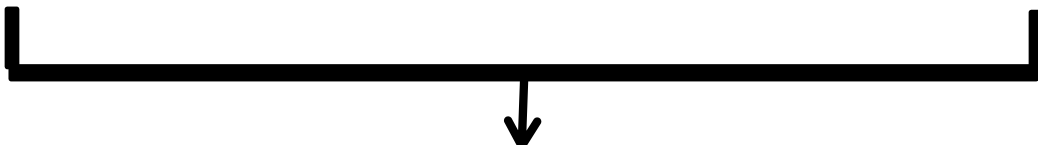
$$\text{同化結果の誤差標準偏差} : \sigma_a^2 = (1-\alpha)^2 \sigma_b^2 + \alpha^2 \sigma_o^2$$

σ_a が最小となる条件を探索

$$\rightarrow \frac{d\sigma_a^2}{d\alpha} = 2(\alpha-1)\sigma_b^2 + 2\alpha\sigma_o^2 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2}}$$

モデルさん : $24.0 \pm 5.0^\circ\text{C}$

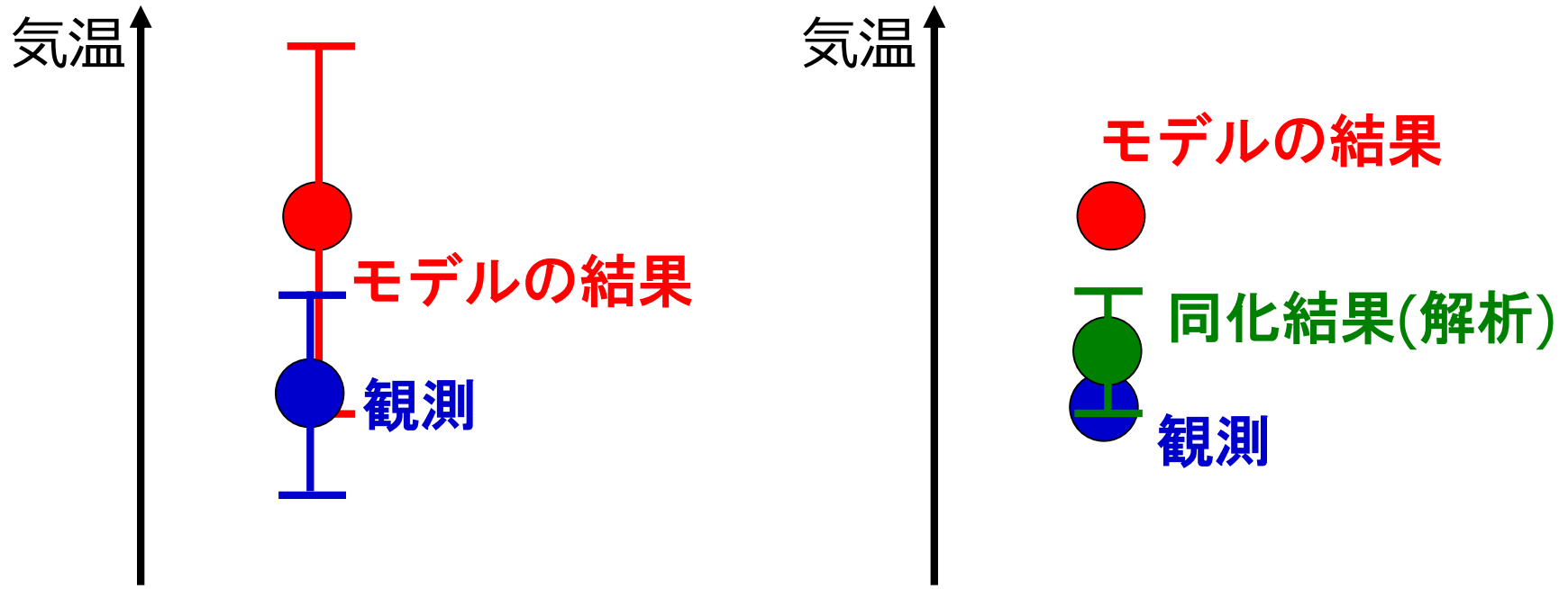
観測さん : $21.0 \pm 2.0^\circ\text{C}$


$$\alpha = \sigma_b^2 / (\sigma_o^2 + \sigma_b^2) = 5.0^2 / (2.0^2 + 5.0^2) = 0.86$$


$$\text{同化さん} : 0.14 \times 24.0 + 0.86 \times 21.0 = 21.4^\circ\text{C}$$

$$\text{誤差標準偏差} \sigma_a = 1.9^\circ\text{C}。すなわち 21.4 \pm 1.9^\circ\text{C}$$

観測 + モデル結果 $\Rightarrow$ 同化結果(解析)



- 観測の誤差標準偏差 σ_o とモデルの誤差標準偏差 σ_b に応じて、重み付けを行う。
- 誤差標準偏差が小さいほうに近い値になる。
- 解析誤差標準偏差 σ_a は、 σ_o や σ_b よりも小さい。

同化結果 $T_a = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} T_b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} T_o$ の別の解釈

評価関数と呼ばれる以下の関数 J を定義し、これが最小となる T を同化結果(解析) $T=T_a$ とする。

$$J(T) = \frac{(T - T_b)^2}{2\sigma_b^2} + \frac{(T - T_o)^2}{2\sigma_o^2}$$

モデル結果の
同化結果からの
離れ具合

観測値の
同化結果からの
離れ具合

$$\frac{dJ}{dT} = \frac{T - T_b}{\sigma_b^2} + \frac{T - T_o}{\sigma_o^2} = 0 \rightarrow T_a = \frac{\sigma_o^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} T_b + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_o^2 + \sigma_b^2} T_o$$

原理に帰る：ベイズの定理

条件付確率(世界をyに限定したときのxの確率)

$$p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x)$$

$$\rightarrow \underset{\text{事後確率}}{p(x|y)} = \frac{\overset{\text{尤度}}{p(y|x)}}{\underset{\text{事前確率}}{p(y)}} \underset{\text{事前確率}}{p(x)}$$

- ある推定に基づく確率(事前確率) $p(x)$ が、情報追加により確率が更新されて、新しい確率(事後確率) $p(x|y)$ になることを表す。
- 10頭立ての競馬で言うと、何の情報もなかったら、ある馬Aが1着になる確率(事前確率)は1/10と推定されるが、馬Aに武豊が乗ることが分かったら、過去の武豊の勝率からして(尤度；過去のデータに基づく想定)、1着になる確率は高くなる(事後確率)。

ベイズの定理：確率密度関数から評価関数へ

- 目的：モデル結果により確率密度関数が事前に推定された物理量 x について、観測値の確率密度関数が得られたという条件を付けて、どの x で確率密度関数が最大になるかを求める。

$$P(x_o | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_o^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma_o^2}\right)$$

尤度：物理量が x だった際に x_o が観測された割合
(を模した確率のモデル化)

$$\boxed{P(x | x_o)} = \frac{P(x_o | x)}{P(x_o)} \boxed{P(x)}$$

事後確率

事前確率：観測入手前に想定した確率

x がどの値のときに確率が最大になるかに興味があるので x の関数でない $p(x_o)$ は無視する。

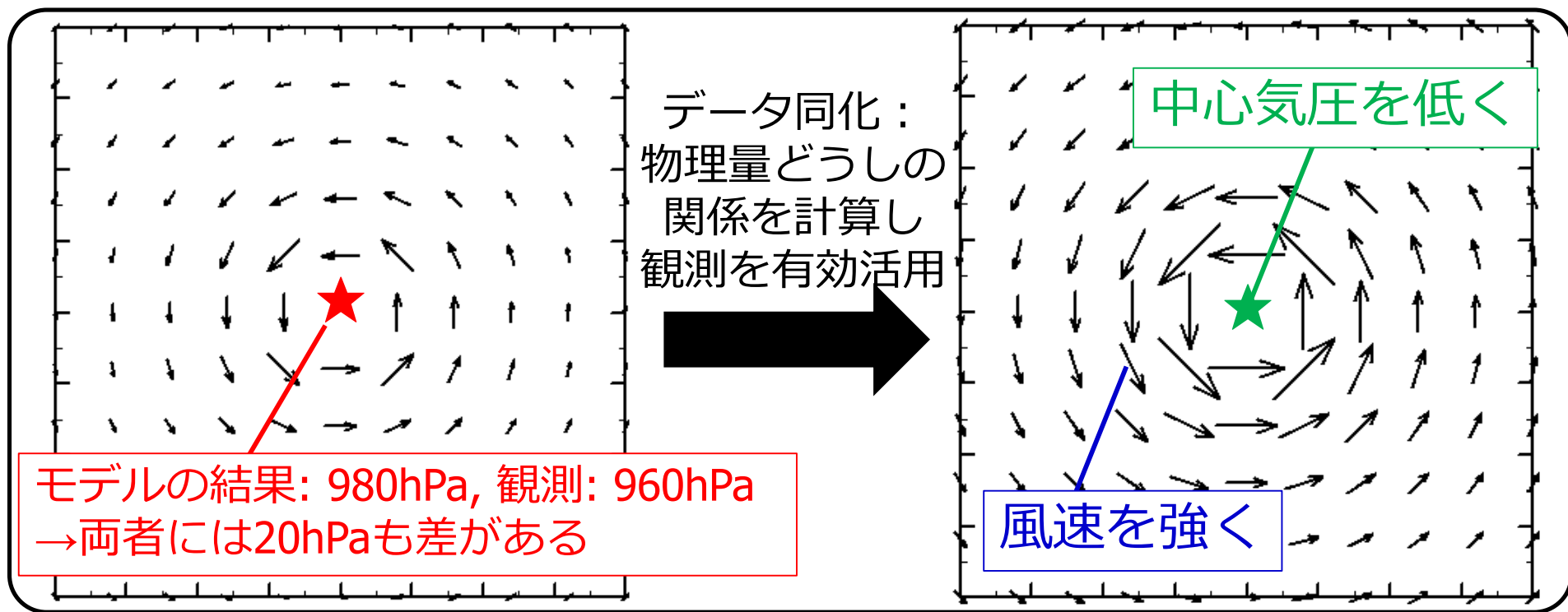
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_b)^2}{2\sigma_b^2}\right)$$

$$P(x | x_o) \propto \exp\left(-\frac{(x-x_b)^2}{2\sigma_b^2} - \frac{(x-x_o)^2}{2\sigma_o^2}\right)$$

評価関数の最大化は、観測が得られた後の事後確率を最大(最頻値探索)を意味する

複数の物理量がモデルで得られ観測が1つ

- 台風を中心気圧の観測が得られたとする
⇒中心気圧の修正で終わるのはもったいない
- 中心気圧が低いとき風速は強い⇒風速も同時修正
- 共分散の情報と観測データを組み合わせることで、
直接観測されていない物理量でも改善できる。



簡単のため2変数で考えよう

- 台風における中心気圧 p と最大風速 v の2変数があり、中心気圧のみ観測されたとする。

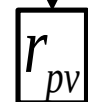
➤ 中心気圧の背景誤差分散 $\sigma_{p,b}^2$

➤ 最大風速の背景誤差分散 $\sigma_{v,b}^2$

➤ 中心気圧と最大風速の背景誤差共分散 $r_{pv} \sigma_{p,b} \sigma_{v,b}$

➤ 中心気圧の観測誤差分散 $\sigma_{p,o}^2$

相関係数



- 同化結果(解析)は「モデル結果と観測結果の線形和」かつ「 $\sigma_{p,a}^2 + \sigma_{v,a}^2$ を最小にするもの」と仮定。

$$\begin{pmatrix} p_a \\ v_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_b \\ v_b \end{pmatrix} + \mathbf{K} \left(\begin{pmatrix} p_o \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{観測行列H}} \begin{pmatrix} p_b \\ v_b \end{pmatrix} \right)$$

モデル結果が2変数、観測値が1変数なので、観測行列を導入して引き算可能にしている

同化結果(解析)

- 教科書2.1節の導出に従うと

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma_{p,b}^2 & r_{pv} \sigma_{p,b} \sigma_{v,b} \\ r_{pv} \sigma_{p,b} \sigma_{v,b} & \sigma_{v,b}^2 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = (\sigma_{p,o}^2), \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ として}$$

$$\boxed{\text{最適な重み}} \quad \mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{H}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_{p,b}^2 / (\sigma_{p,b}^2 + \sigma_{p,o}^2) \\ r_{pv} \sigma_{p,b} \sigma_{v,b} / (\sigma_{p,b}^2 + \sigma_{p,o}^2) \end{pmatrix}$$

が $\sigma_{p,a}^2 + \sigma_{v,a}^2$ の最小値を与える「重み」となる。

- 陽に書くと
$$\begin{cases} p_a = p_b + \frac{\sigma_{p,b}^2}{\sigma_{p,b}^2 + \sigma_{p,o}^2} (p_o - p_b) \\ v_a = v_b + \frac{r_{pv} \sigma_{p,b} \sigma_{v,b}}{\sigma_{p,b}^2 + \sigma_{p,o}^2} (p_o - p_b) \end{cases}$$

観測値 p_o と
相関を使い
 v を更新

比較：1変数の場合と多変数の場合

- 1変数の場合

$$x_a = x_b + \sigma_b^2 \left(\sigma_o^2 + \sigma_b^2 \right)^{-1} (x_o - x_b)$$

- 多変数の場合

モデル変数の数 = 格子点数 × 物理量の数
(複数の変数をまとめてベクトルで書く)

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{H}^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T \right)^{-1}}_{=\mathbf{K}} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b)$$

観測値ベクトルは
 $\mathbf{y}$ と書くことが多いので
以後それにならう

評価関数を用いた解釈

- 以下の評価関数を最小化する解 $\mathbf{x}$ を考える

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})$$

- 実はこの解も

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{B}\mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b)$$

を与える(証明は2.2.1節; $\partial J / \partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$ から導く)。

モデル変数の時間発展を考える

- モデル変数が以下の式に従って時間変化するとする。
(ここでは下付き文字の0やtは時間を表す)

$$\mathbf{x}_t = M(\mathbf{x}_0)$$

- モデル変数の誤差 $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ の時間発展は

$$\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{b,t} = M(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0})$$

から上の式を引き算して、テイラー展開を使うと

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{b,t} = M(\mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}) - M(\mathbf{x}_0) \cong \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}$$

- $\mathbf{M} \equiv \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}_0}$ は接線形モデル(状態遷移行列)と呼ばれる。

背景誤差共分散の時間発展

- 誤差の時間発展は $\boldsymbol{\varepsilon}_{b,t} \cong \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0} = \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}$

- 背景誤差共分散は

$$\mathbf{B}_0 = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}^T \rangle$$

2変数のときの誤差の時間発展が

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma_{p,b}^2 & r_{pv} \sigma_{p,b} \sigma_{v,b} \\ r_{pv} \sigma_{p,b} \sigma_{v,b} & \sigma_{v,b}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_p^2 \rangle & \langle \varepsilon_p \varepsilon_v \rangle \\ \langle \varepsilon_p \varepsilon_v \rangle & \langle \varepsilon_v^2 \rangle \end{pmatrix}$$

であったことを思い出そう。

$$\mathbf{B}_t = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{b,t} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,t}^T \rangle = \langle \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}^T \mathbf{M}^T \rangle = \mathbf{M} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0} \boldsymbol{\varepsilon}_{b,0}^T \rangle \mathbf{M}^T = \mathbf{M} \mathbf{B}_0 \mathbf{M}^T$$

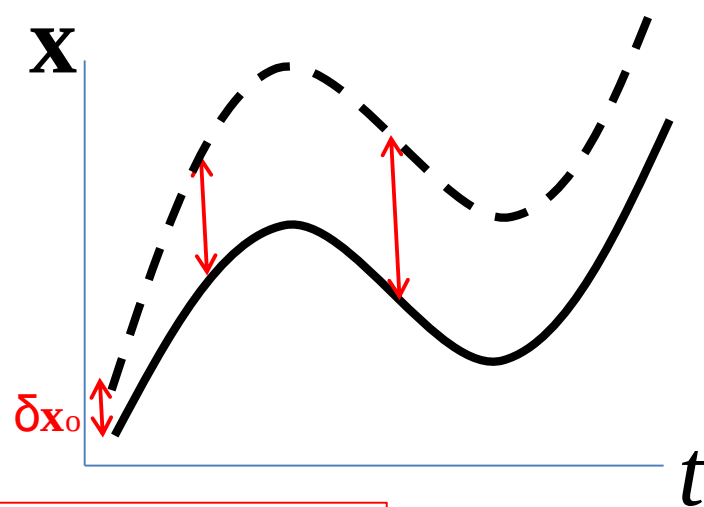
- 初期の $\mathbf{B}_0$ が与えれば、摂線形モデル $\mathbf{M}$ と随伴(アジョイント)モデル $\mathbf{M}^T$ を使って原理的には $\mathbf{B}_t$ も計算可能となる。

非線形モデル

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= -y - xz + rx \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = M(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \equiv (x, y, z)^T$$



接線形モデル

$$\begin{aligned}\frac{d\delta x}{dt} &= -\sigma(\delta x - \delta y) \\ \frac{d\delta y}{dt} &= -\delta y - x\delta z - z\delta x + r\delta x \\ \frac{d\delta z}{dt} &= x\delta y + y\delta x - b\delta z\end{aligned}$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} \cong \frac{\partial M}{\partial\mathbf{x}} \delta\mathbf{x} = \mathbf{M}\delta\mathbf{x}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z + r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

随伴モデル

$$\begin{aligned}\frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) &= -\sigma \frac{\partial J}{\partial x} - (z - r) \frac{\partial J}{\partial y} + y \frac{\partial J}{\partial z} + F_x \\ \frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial y} \right) &= \sigma \frac{\partial J}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial y} + x \frac{\partial J}{\partial z} + F_y \\ \frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial z} \right) &= -x \frac{\partial J}{\partial y} - b \frac{\partial J}{\partial z} + F_z\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial\mathbf{x}} \right) = \mathbf{M}^T \left(\frac{\partial J}{\partial\mathbf{x}} \right) + \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} -\sigma & -z + r & y \\ \sigma & -1 & x \\ 0 & -x & -b \end{pmatrix}$$

多変数かつ時間発展のある系での同化

- 導出は淡路ら(2009)などを参照。

- 1変数

$$x_a = x_b + \boxed{\sigma_b^2} / \left(\boxed{\sigma_o^2} + \boxed{\sigma_b^2} \right)^{-1} \left(\boxed{x_o} - \boxed{x_b} \right)$$

背景誤差共分散 観測誤差
共分散 観測値 モデル結果
ベクトル

- 多変数(4DVarもEnKFも線形ガウスな解は同じ)
モデル変数の数 = 格子点数 × 物理量の数
複数の変数をまとめてベクトルで書くと

$$\mathbf{x}_{a,t} = \mathbf{x}_{b,t} + \boxed{\mathbf{M}\mathbf{B}_0\mathbf{M}^T} \mathbf{H}^T \left(\boxed{\mathbf{R}} + \mathbf{H} \boxed{\mathbf{M}\mathbf{B}_0\mathbf{M}^T} \mathbf{H}^T \right)^{-1} \left(\boxed{\mathbf{y}_t} - \boxed{\mathbf{H}\mathbf{x}_{b,t}} \right)$$

背景誤差 観測誤差
共分散行列 共分散行列 観測値 モデル結果
ベクトル

観測行列(モデル結果を観測値と比較できる変数に変換)

4次元データ同化について

- 線形性と正規分布の仮定が成り立つ場合、カルマンフィルタも4次元変分法も同じ解。

$$\mathbf{x}_{a,t} = \mathbf{x}_{b,t} + \mathbf{M}\mathbf{B}_0\mathbf{M}^T\mathbf{H}^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{M}\mathbf{B}_0\mathbf{M}^T\mathbf{H}^T \right)^{-1} \left(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_{b,t} \right)$$

- $\mathbf{M}\mathbf{B}_0\mathbf{M}^T$ の評価に関する実装が手法で異なる。

手法	$\mathbf{B}_0$	$\mathbf{B}_0$ の時間発展
4D-Var	NMC (気候値で近似)	正確
EnKF	アンサンブル近似	アンサンブル近似
Hybrid	アンサンブル近似	正確

- データ同化は「背景誤差分散の初期値と時間発展のモデル化」の問題とみなせる。

データ同化の解の解釈

- 線形 & 誤差が正規分布をしているとき解は

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \mathbf{MBM}^T \mathbf{H}^T \left(\mathbf{R} + \mathbf{HMBM}^T \mathbf{H}^T \right)^{-1} \mathbf{d}$$

である。ここで、
インクリメント($\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$) イノベーション($\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b$)

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{HMB}^{1/2}, \mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1/2} \mathbf{x}, \mathbf{y}' = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{y}$$

$\mathbf{L}$ の特異ベクトル・特異値を $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda$ とすると、

$$\mathbf{x}_a' = \mathbf{x}_b' + \sum_{\substack{l=1 \\ \text{モード}}}^m \frac{\lambda_l^2}{1 + \lambda_l^2} \frac{\mathbf{u}_l^T \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{d}}{\lambda_l} \mathbf{v}_l$$

と変形することができる(Johnson et al. 2005)

データ同化の解の解釈

$$\mathbf{x}_a' = \mathbf{x}_b' + \sum_{l=1}^m \frac{\lambda_l^2}{1 + \lambda_l^2} \frac{\mathbf{u}_l^T \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{d}}{\lambda_l} \mathbf{v}_l$$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda$ は $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1/2} \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{B}^{1/2}$ の特異ベクトルと特異値

- $\lambda_l \gg 1$ に対応する $\mathbf{u}_l, \mathbf{v}_l$ はインクリメントに反映され、
 $\lambda_l \ll 1$ に対応する $\mathbf{u}_l, \mathbf{v}_l$ は反映されない。
 - 観測誤差共分散 $\mathbf{R}$ が背景誤差共分散 $\mathbf{B}$ に比べて小さければ λ が大きく、修正されるモードは多い。
 - 成長率の大きなモード($\mathbf{M}$ の特異値が大きい)は、インクリメントに反映されやすい。
⇒ 例：傾圧不安定の状況で下層渦度が観測されたら、上空に向かい西傾した渦度場修正が施される。

伊藤のこれまでのデータ同化研究： 台風予測に適した同化手法

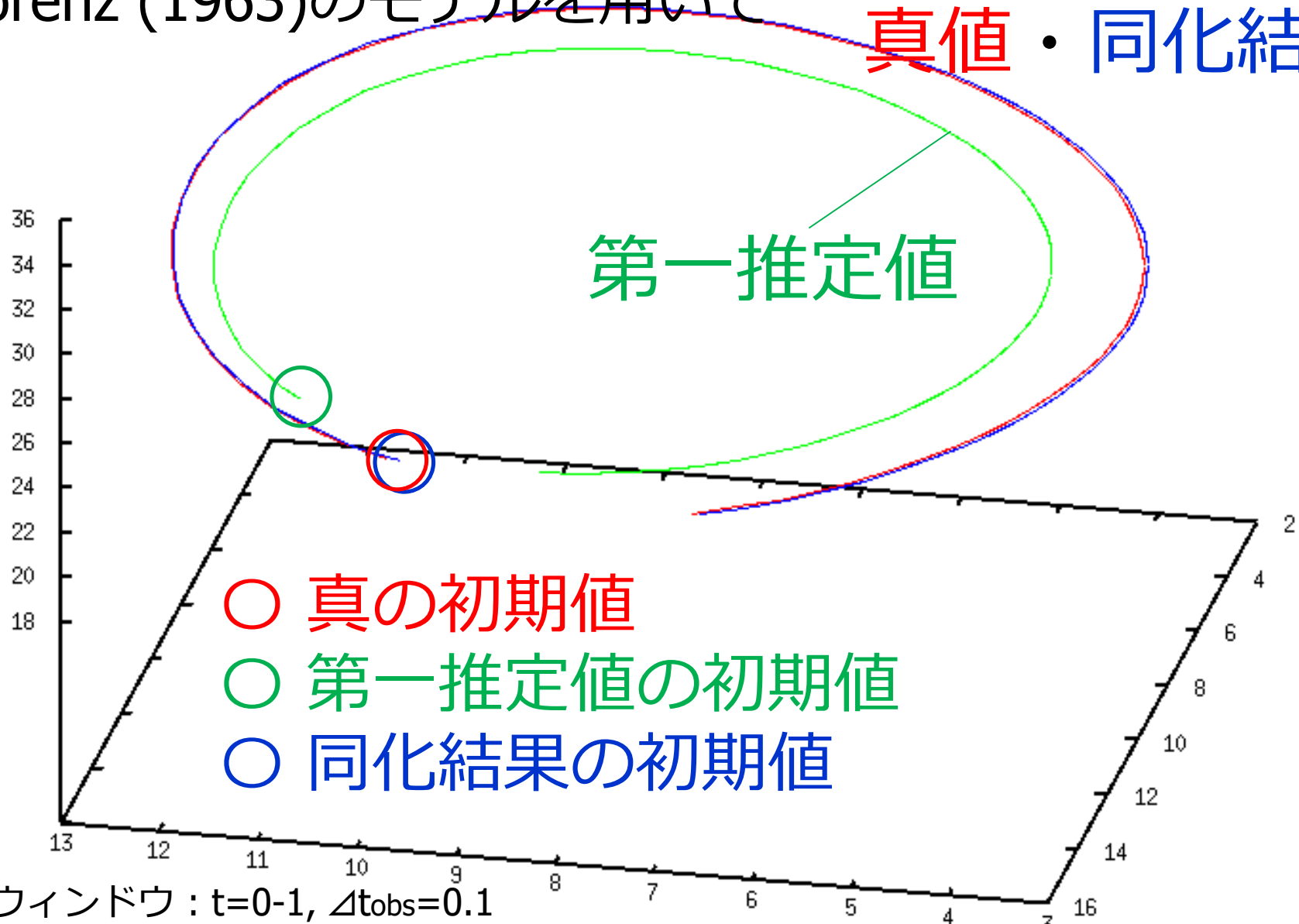
- 現実問題としては、初期値以外にも誤差があったり、**B**が不完全に実装されていたりすることで最適化が不十分となっている。
- 通常のデータ同化システムでは、物理変数の最適化を行うが、これを、海面交換係数の最適化ができるシステムに拡張する。
- 通常の4次元変分法は**B**₀に気候値を用いるが、このままでは観測データに対し、温帯低気圧ライクな修正がかかる。**B**₀に台風ライクな特徴を入れられれば、観測データから多くの情報を抽出できる。

海面交換係数の最適化

固定パラメータに誤差がないとした場合の同化

Lorenz (1963)のモデルを用いて

真値・同化結果

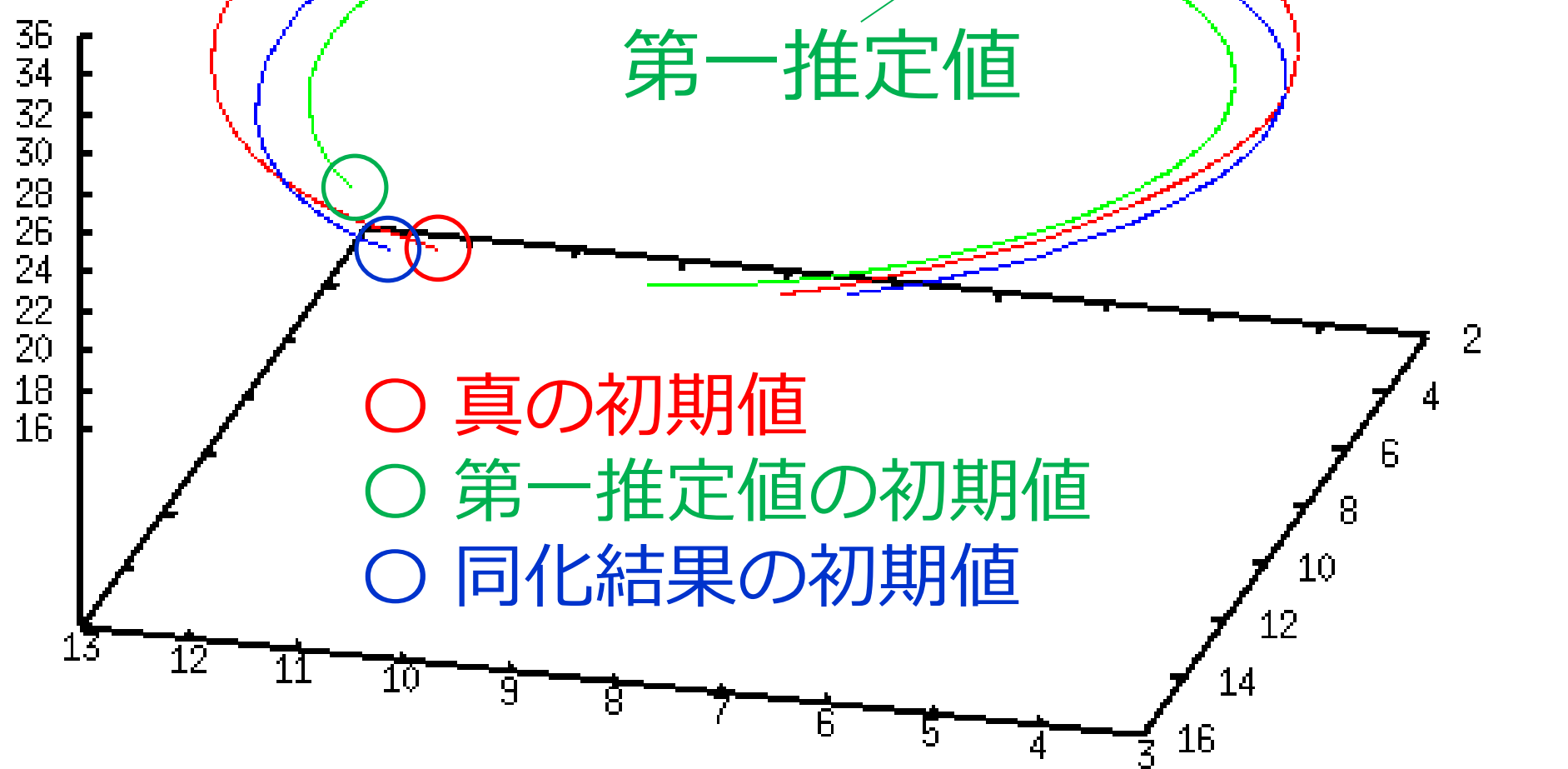


同化ウィンドウ : $t=0-1$, $\Delta t_{\text{obs}}=0.1$

$\sigma=10.0$, $r=28.0$, $b=8/3$ $x_0t=10.0$, $y_0t=14.0$, $z_0t=24.0$, $x_0f=11.0$, $y_0f=13.0$, $z_0f=25.0$

固定パラメータに誤差を入れて初期値のみ最適化

同化結果 真値 $r_{true} = 28.0$
 $r_b = r_{DA} = 26.0$



うまくいかなかった

- 初期値と固定パラメータの両方に誤差があるのに、初期値だけを制御してもうまくいかない。
- 固定パラメータにも誤差があることをちゃんと考慮しよう。
- J を定義し直して、 $\partial J / \partial r$ を計算。

$$J = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2} \frac{(r - r_b)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{2} \sum_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{H} \mathbf{x}_t)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{H} \mathbf{x}_t)$$

$$\frac{d\delta x}{dt} = -\sigma(\delta x - \delta y)$$

$$\frac{d\delta y}{dt} = -\delta y - x\delta z - z\delta x + r\delta x + x\delta r$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = x\delta y + y\delta x - b\delta z$$

$$\frac{d\delta r}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z + r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = (0, x, 0)^T$$

$$\mathbf{x} \equiv (x, y, z)^T \quad \mathbf{c} \equiv (r)^T$$

$$\frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right) = -\sigma \frac{\partial J}{\partial x} - (z - r) \frac{\partial J}{\partial y} + y \frac{\partial J}{\partial z} + F_x$$

$$\frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial y} \right) = \sigma \frac{\partial J}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial y} + x \frac{\partial J}{\partial z} + F_y$$

$$\frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial z} \right) = -x \frac{\partial J}{\partial y} - b \frac{\partial J}{\partial z} + F_z$$

$$\frac{d}{d(-t)} \left(\frac{\partial J}{\partial r} \right) = x \frac{\partial J}{\partial y} + F_r$$

$$\frac{d}{d(-t)} \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial J}{\partial \mathbf{c}} \end{pmatrix} + \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} -\sigma & -z + r & y \\ \sigma & -1 & x \\ 0 & -x & -b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^T = (0, x, 0)$$

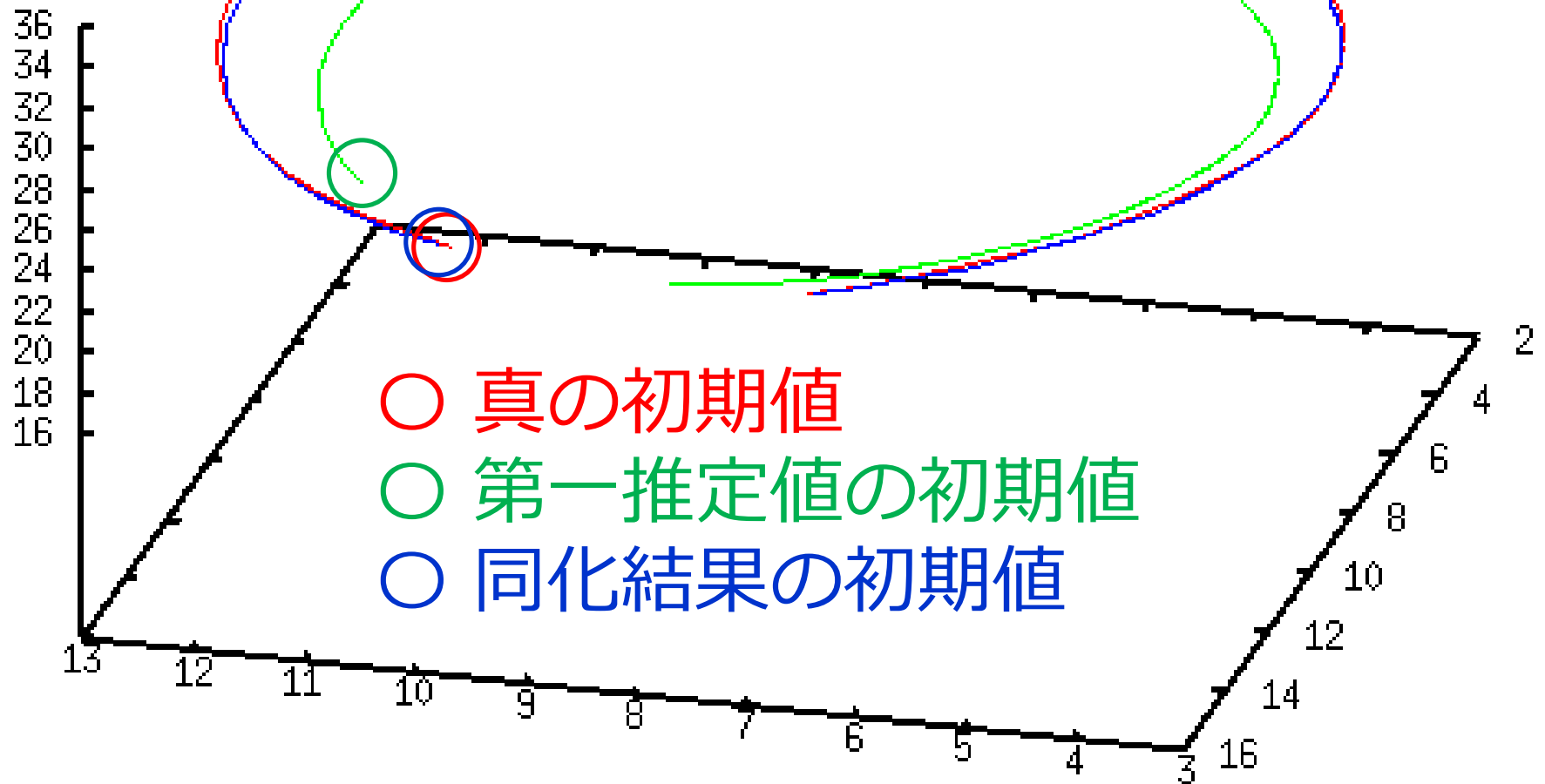
→ $\partial J / \partial x, \partial J / \partial y, \partial J / \partial z$ は変更なし & $\partial J / \partial r$ は既知の $\partial J / \partial y$ から計算可

固定パラメータもちゃんと最適化
⇒ちゃんとうまくいった！

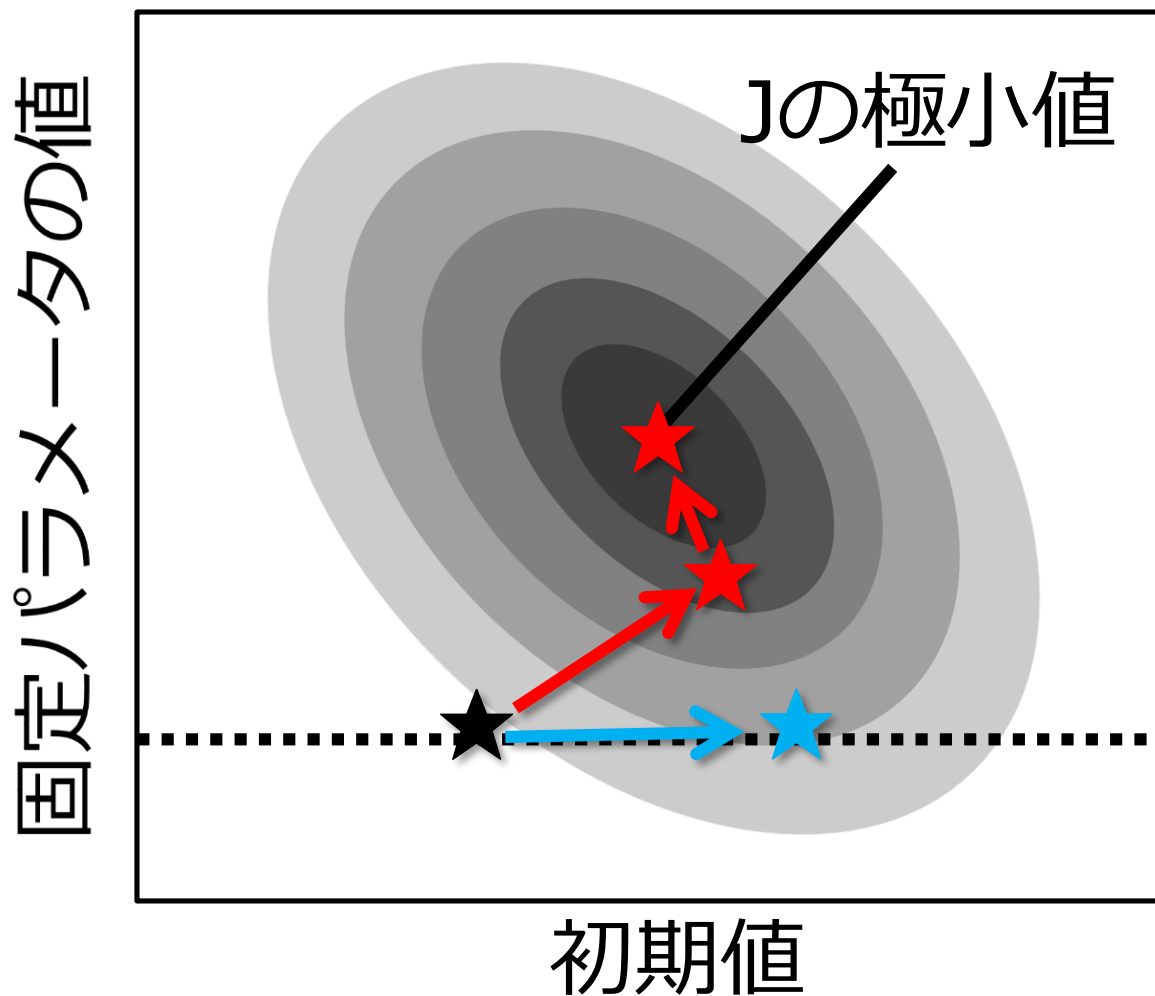
$$r_{true} = 28.0$$

$$r_b = 26.0$$

$$r_{DA} = 27.7$$



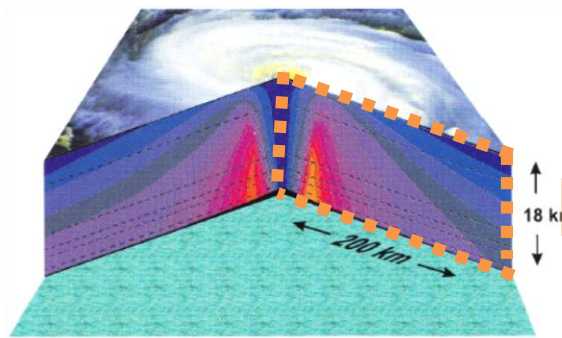
位相空間での概念図



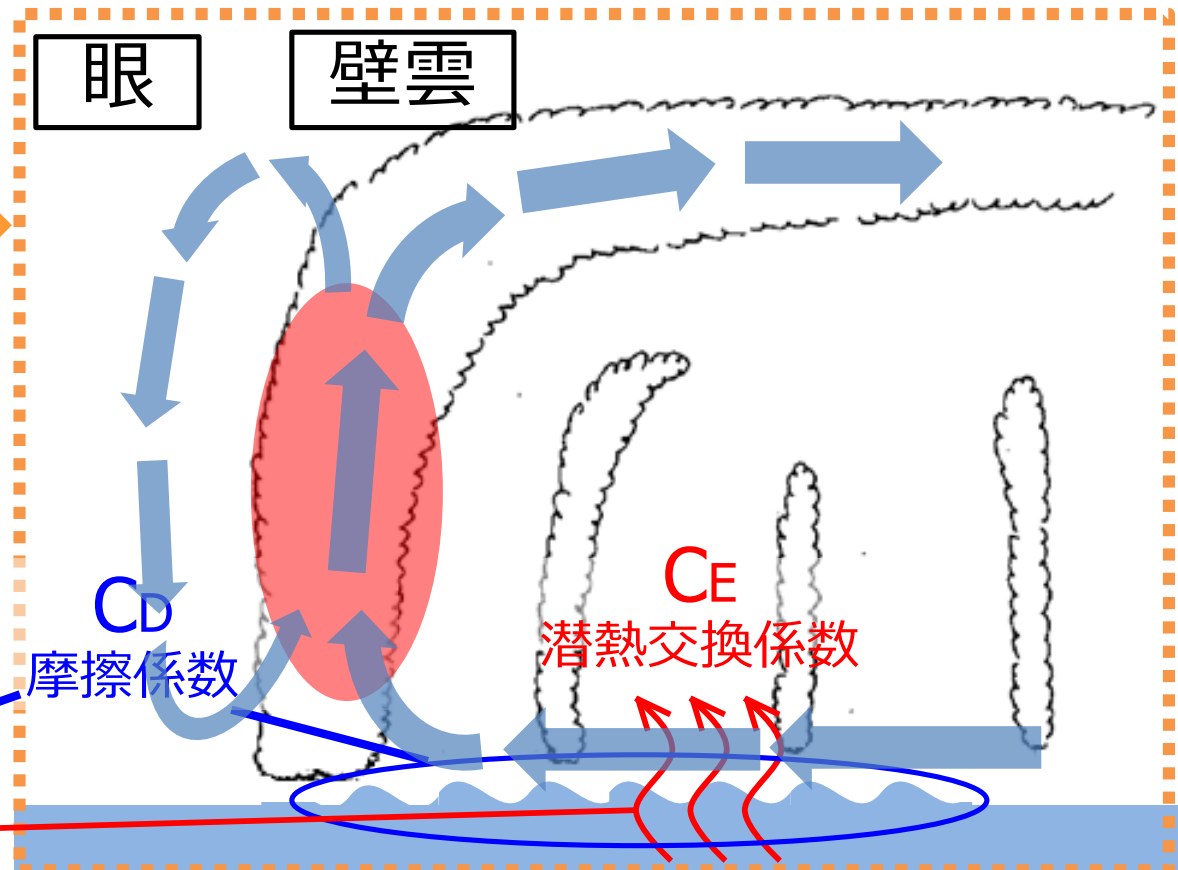
WISHE: 台風の最大風速の理論式 (Emanuel, 1986)

$$V_{\max} \sim \sqrt{\frac{T_s - T_o}{T_o} \frac{C_k}{C_D} (k_o^* - k_a)}$$

■ C_k : 熱交換係数 ($\sim C_E$: 潜熱交換係数), C_D : 摩擦係数



波浪や波しぶきに
依存する係数



数値シミュレーション

大気

(観測点)

数値モデルで
計算される風向

海面

海洋

数値モデルで計算
される海面ソース

データ同化 (アジョイント法)

(1) 観測値とモデル結果
との差を計算

(2) アジョイント法
による情報伝播
(= 時間後方積分)

(3) 海面ソースを修正
⇒観測値とモデル結果の
差が小さくなるように

軸対称台風モデルを用いた双子実験

- ある数値実験の結果を「真値」とみなし, 「誤った初期値・交換係数」から開始した数値計算に対して観測値を同化し、真値に近い値を復元できるか確認する.
- 本研究で行った双子実験の構成要素

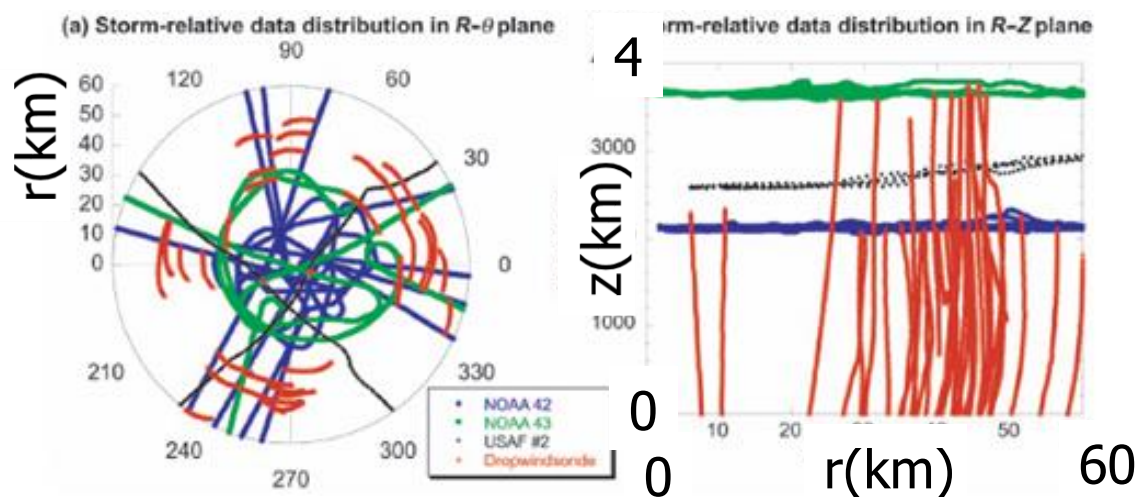
True	「真の」 C_D , C_E と初期値を与えた実験
Observation	True の計算結果 + ガウシアンノイズ
NoAsm	「誤った」 C_D , C_E と初期値を与えた実験
Asm_NoCoef	NoAsm から出発。初期値のみを最適化
Asm_Coef	NoAsm から出発。 C_D , C_E と初期値を最適化



The diagram illustrates the data assimilation process. A blue line connects the 'Observation' row to the 'Asm_NoCoef' and 'Asm_Coef' rows. Two arrows labeled 'DA' (Data Assimilation) point from the 'Observation' row to the 'Asm_NoCoef' and 'Asm_Coef' rows, indicating that the observed data is used to refine the model results.

双子実験の主な設定

同化ウィンドウ	Day 6.0からDay 10.0
観測物理量・時間間隔	12 hごと (動径風速, 接線風速, 水蒸気量, 混合層の運動量)
観測量	$r < 100$ km, $z < 5$ kmの全グリッド
強風時の交換係数	[誤った値] C_D, C_E : Large and Pond (1981) ($V \leq 30$ m/s), $V > 30$ m/s では一定. (誤差は近年提案された値のばらつき程度の大きさ)
背景誤差共分散行列 B	既知とする: 典型的影響半径をフーリエ解析から決め、大きさは"TRUE"の時間変動の分散のスケール. 同じ物理量のみ
観測誤差共分散行列 O	既知とする: 対角成分のみ。大きさは B の対角成分の1/20
制御変数	◆ Asm_NoCoef : 初期値 ◆ Asm_Coef : 初期値 & C_D & C_E
最適値の探索手法	最急降下法 (探索回数は40回)



NOAA/HRDによる台風
の集中観測の一例
(Montgomery et al., 2006)

CDとCEの最適化の結果

NoAsm: 「誤った」
 C_D , C_E による実験

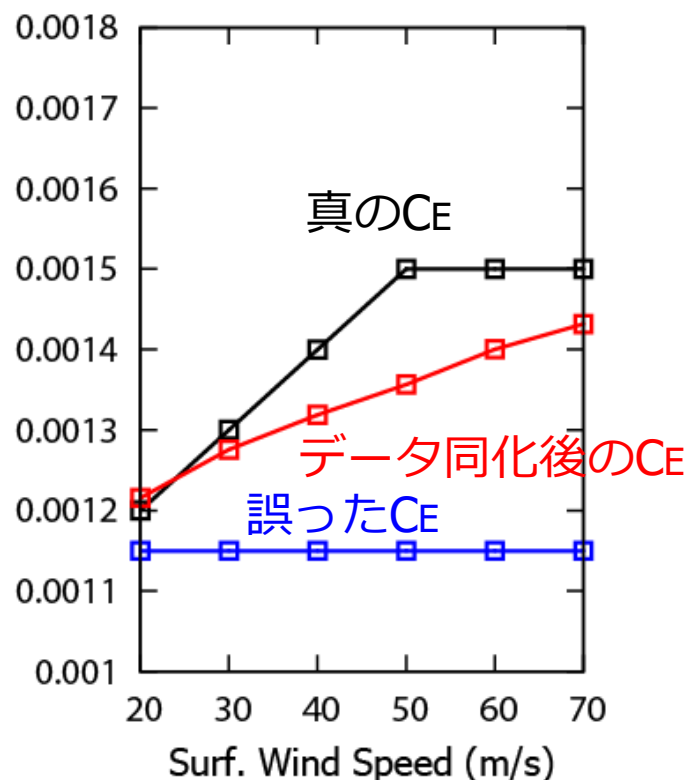
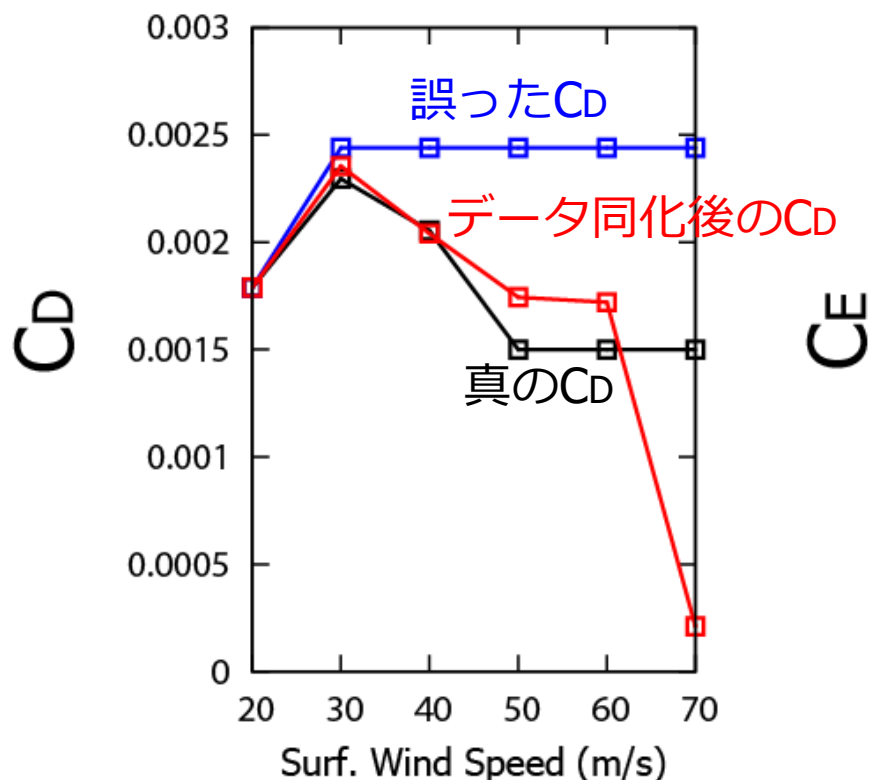
擬似的に生成した
ドロップゾンデ観測

データ同化

C_D と C_E の復元値

↕

「真の」 C_D と C_E

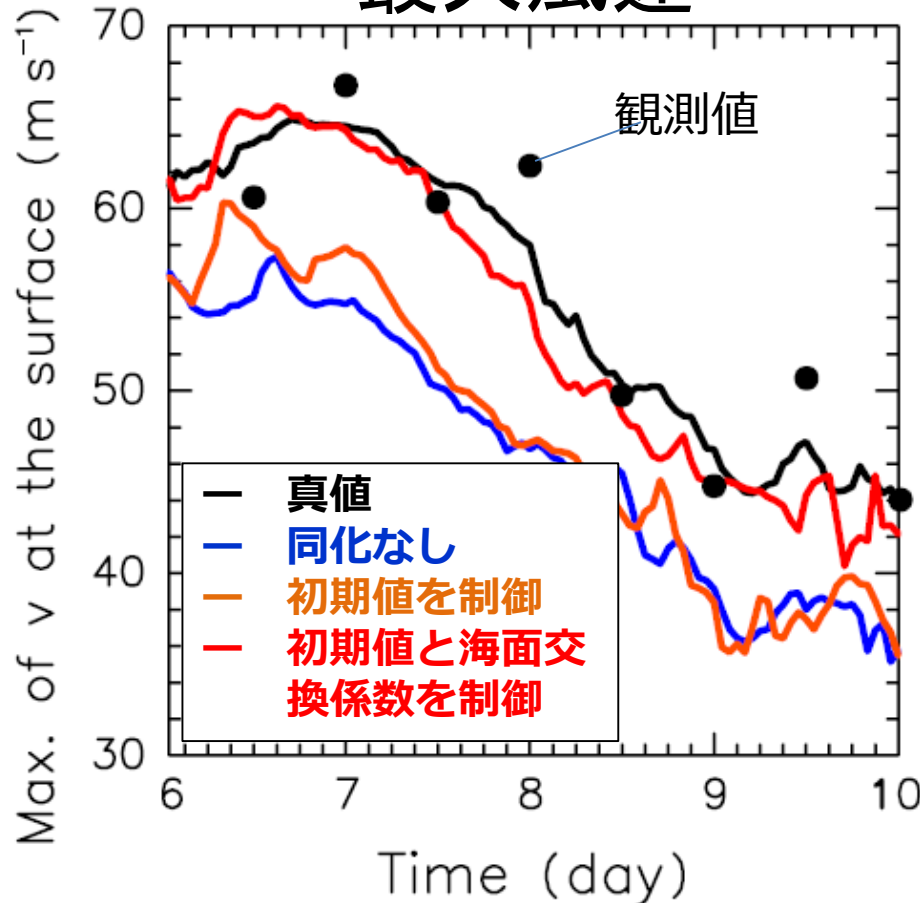


(Ito et al. 2010)

軸対称台風モデルを用いた同化実験

台風の内部コアを再現するうえでは、海面交換係数の最適化を図ることが重要であった。

最大風速



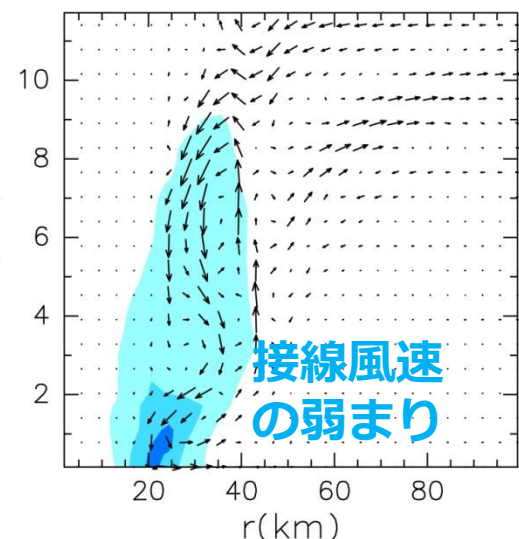
- 真値からの平均二乗誤差
“NoAsm”: 7.3 m/s
“Asm_NoCoef” 6.3 m/s
“Asm_Coef” 2.1 m/s
- “NoAsm”や“Asm_NoCoef”では、台風が系統的に弱い。

(Ito et al. 2010)

風速・温位・水蒸気場の誤差 (同化期間平均)

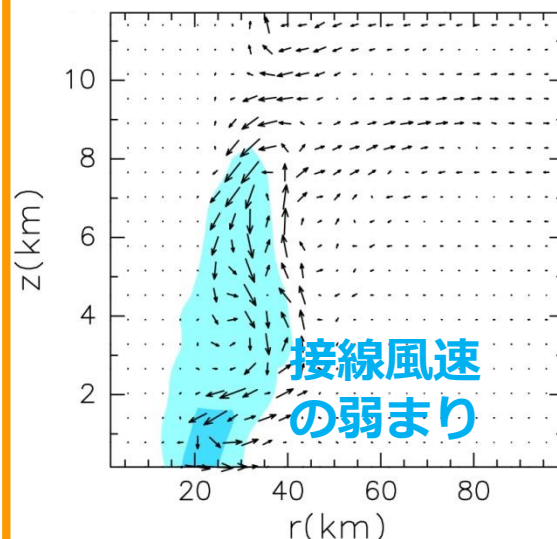
NoAsm

陰影 Δv , ベクトル($\Delta u, \Delta w$)



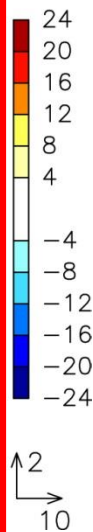
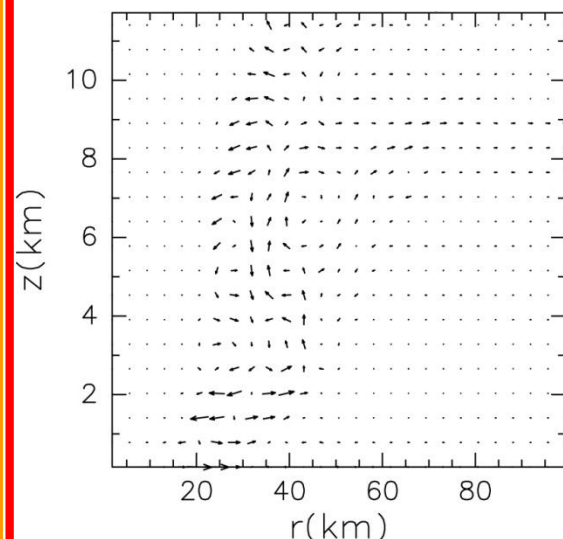
AsmNoCoef

陰影 Δv , ベクトル($\Delta u, \Delta w$)

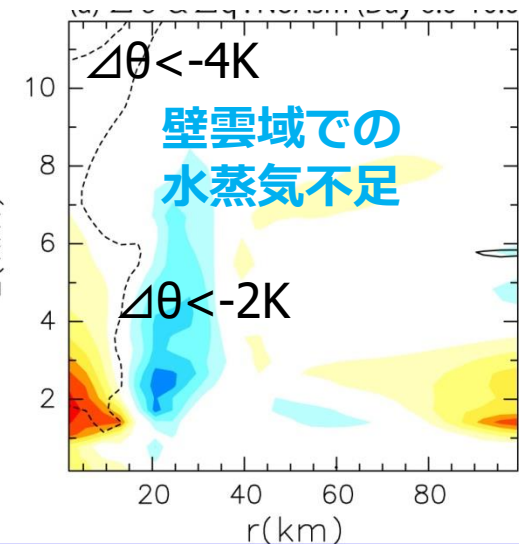


AsmCoef

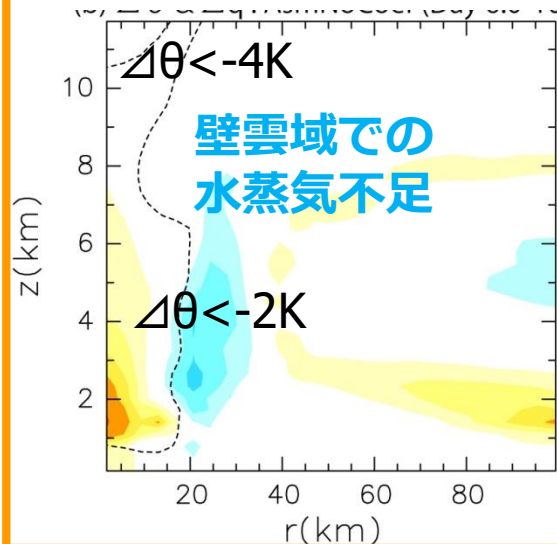
陰影 Δv , ベクトル($\Delta u, \Delta w$)



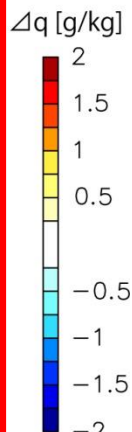
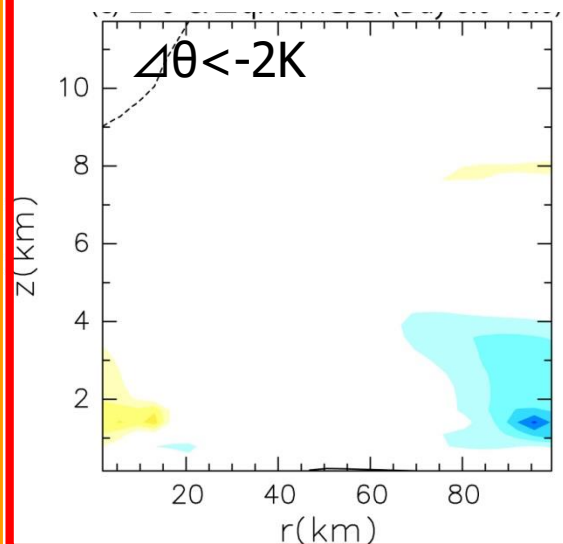
コンター $\Delta\theta$, 陰影 Δq



コンター $\Delta\theta$, 陰影 Δq



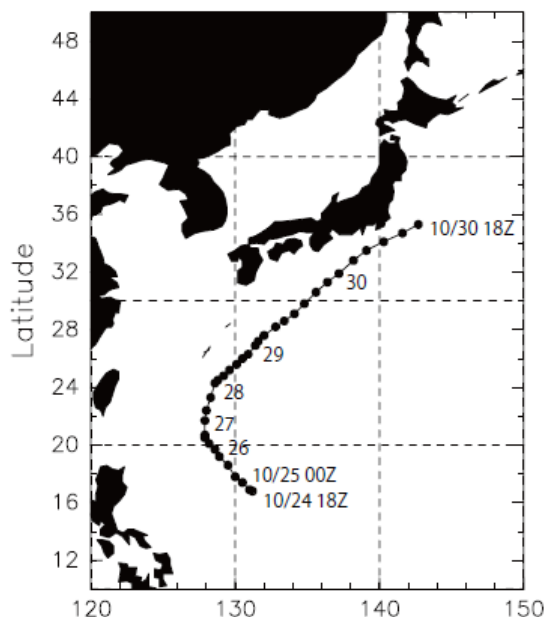
コンター $\Delta\theta$, 陰影 Δq



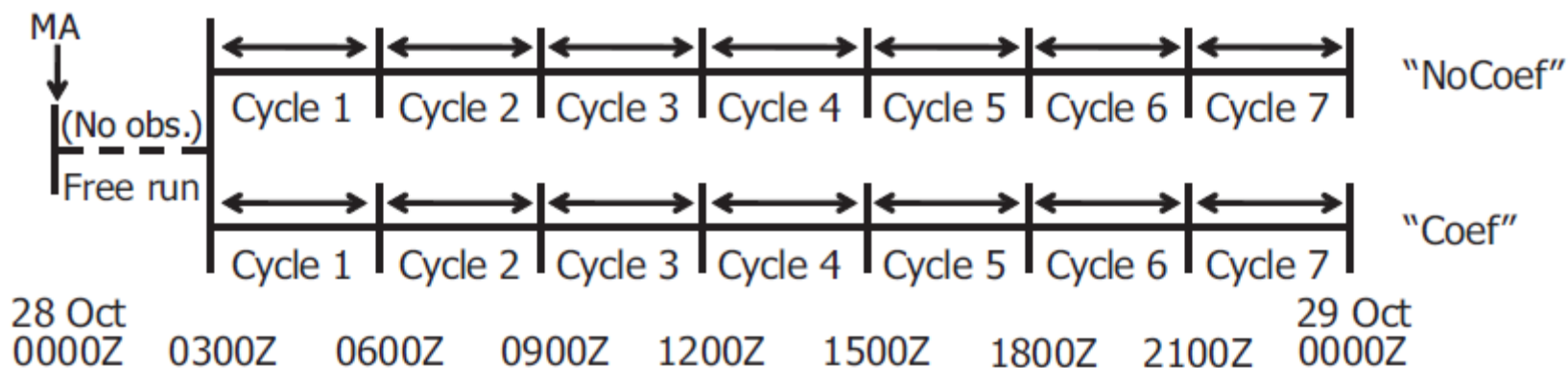
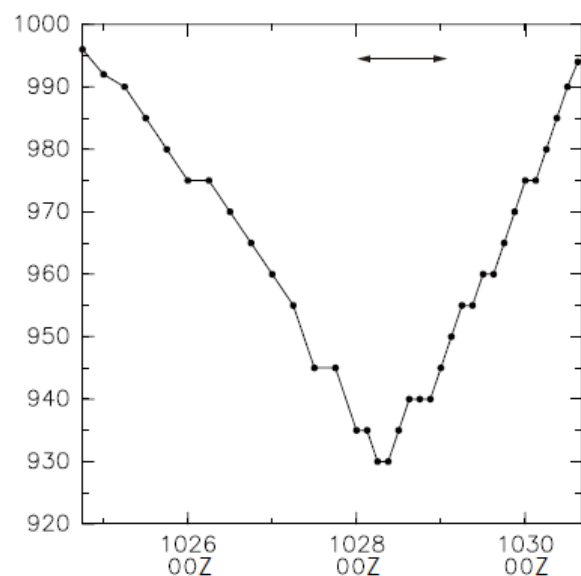
非静力学メソ4次元変分法(JNoVA)への適用

- 2010年台風第14号(Chaba)
- 計算機資源の制約から最盛期の1日間のみ

(a) TC location



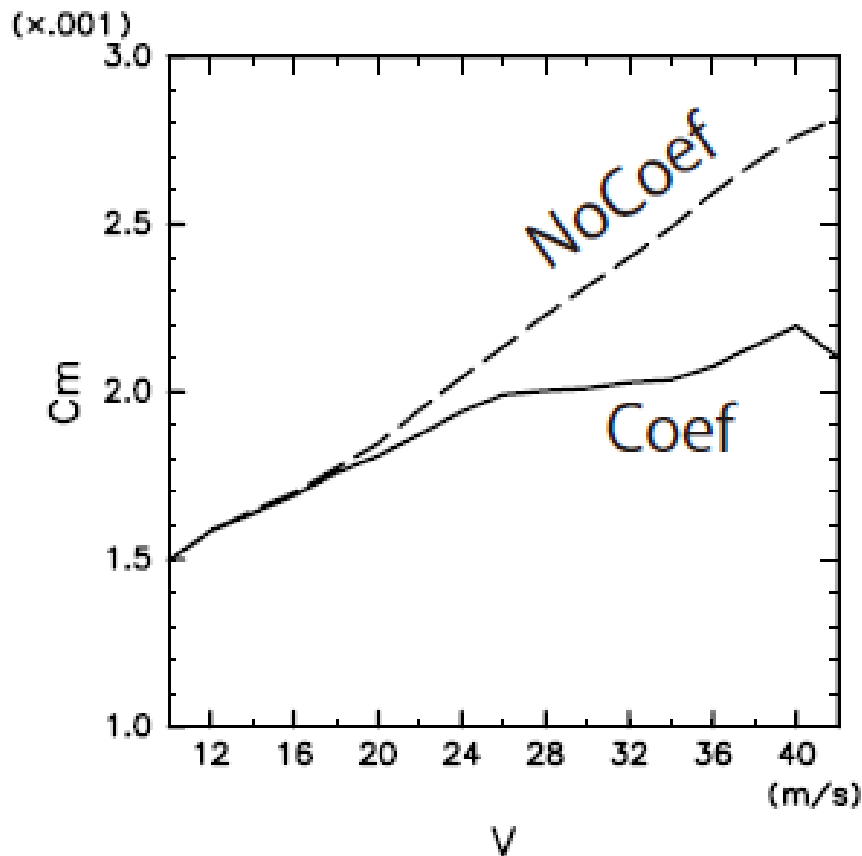
(b) Minimum sea level pressure



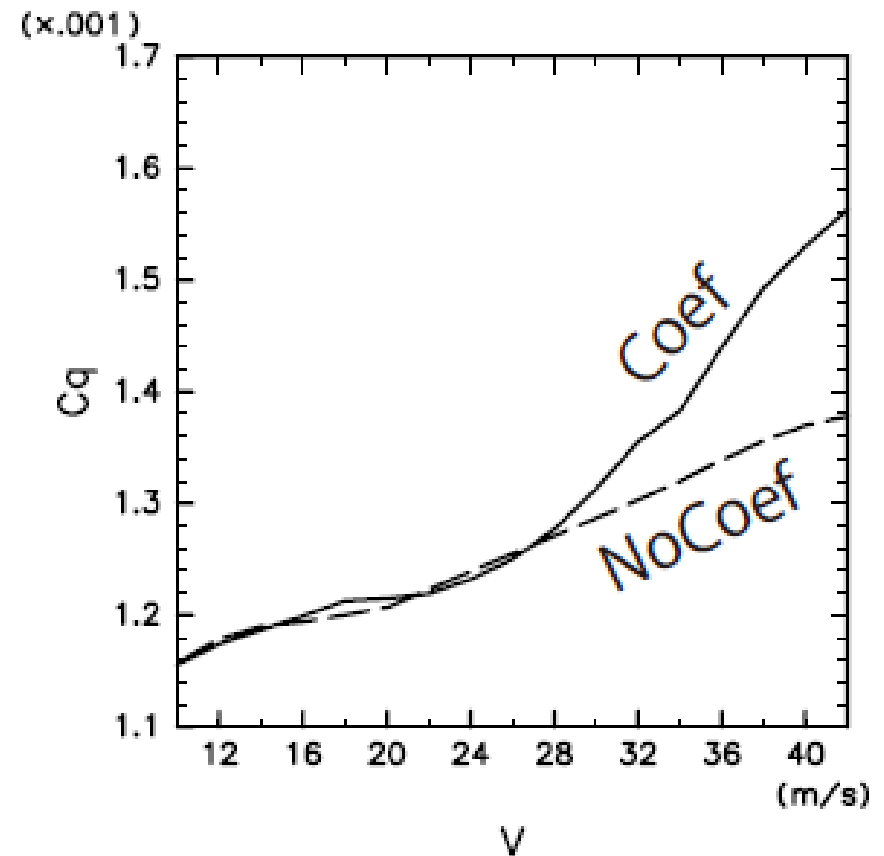
海面交換係数の風速依存性

- **NoCoef** : 初期値のみを最適化
- **Coef** : 初期値及び海面交換係数を最適化

(a) Drag coefficient

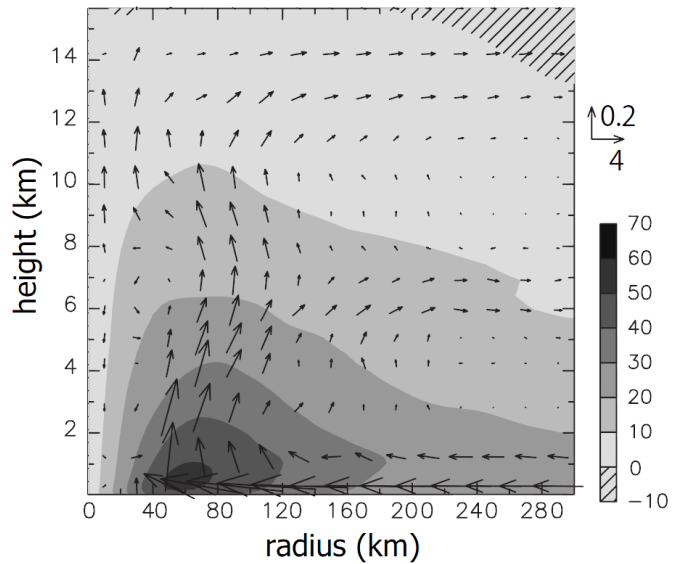


(b) Latent heat exchange coefficient

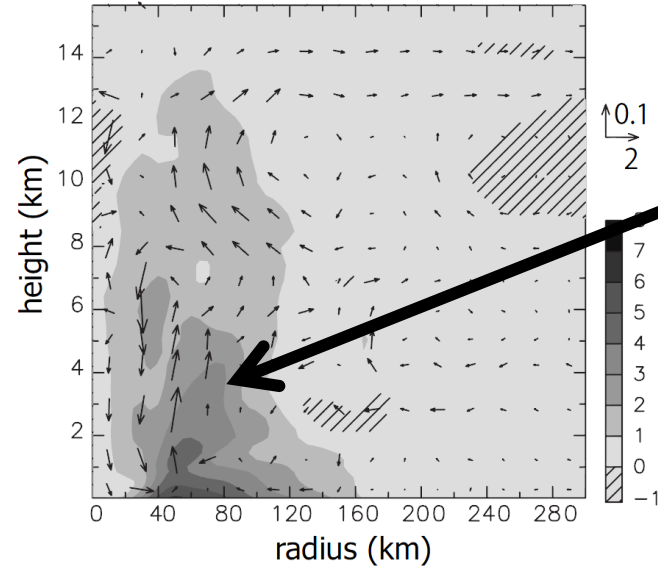


TC Chabaの構造の変化：軸対称モデルと整合的

Wind field [Coef]

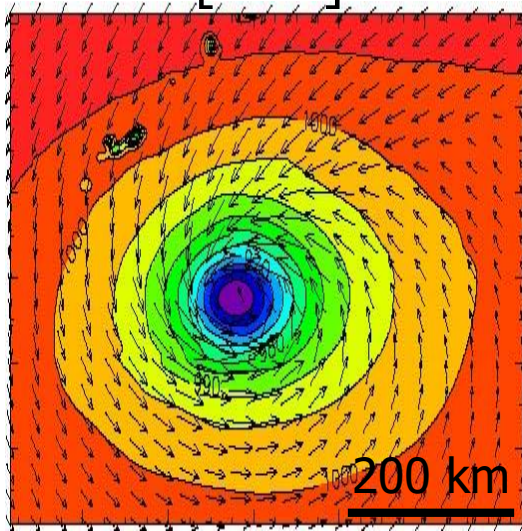


Wind field [Coef - NoCoef]

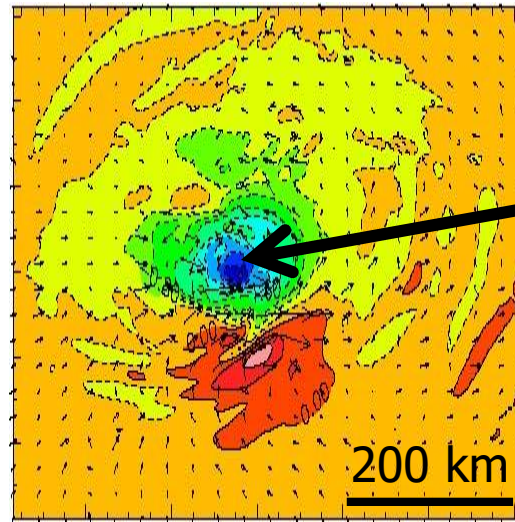


海面付近での
接線風速に大
きな差が出た

Psrf, (Usrf, Vsrf)
[Coef]



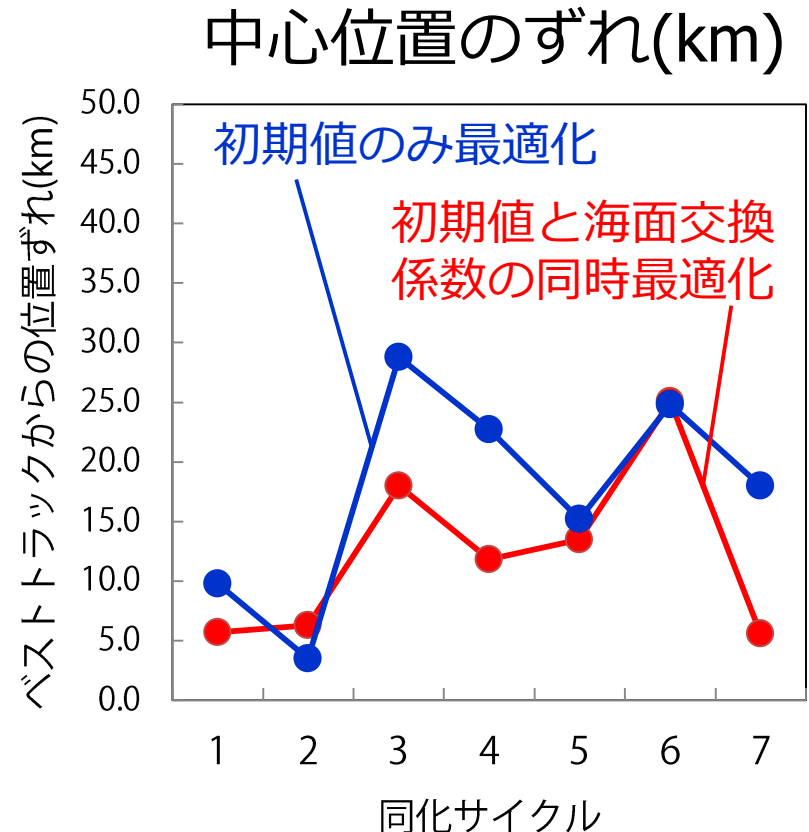
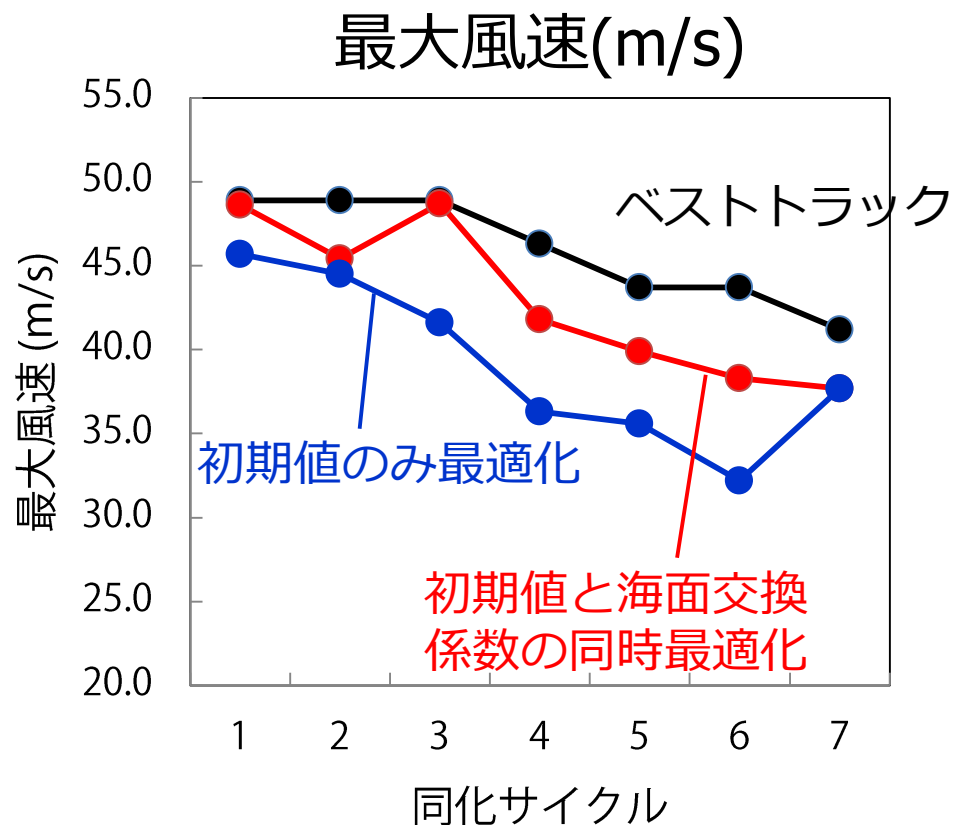
Δ Psrf, (Δ Usrf, Δ Vsrf)
[Coef - NoCoef]



気圧が低下し、
中心位置はベス
トトラックに近く

強度と中心位置のずれの改善

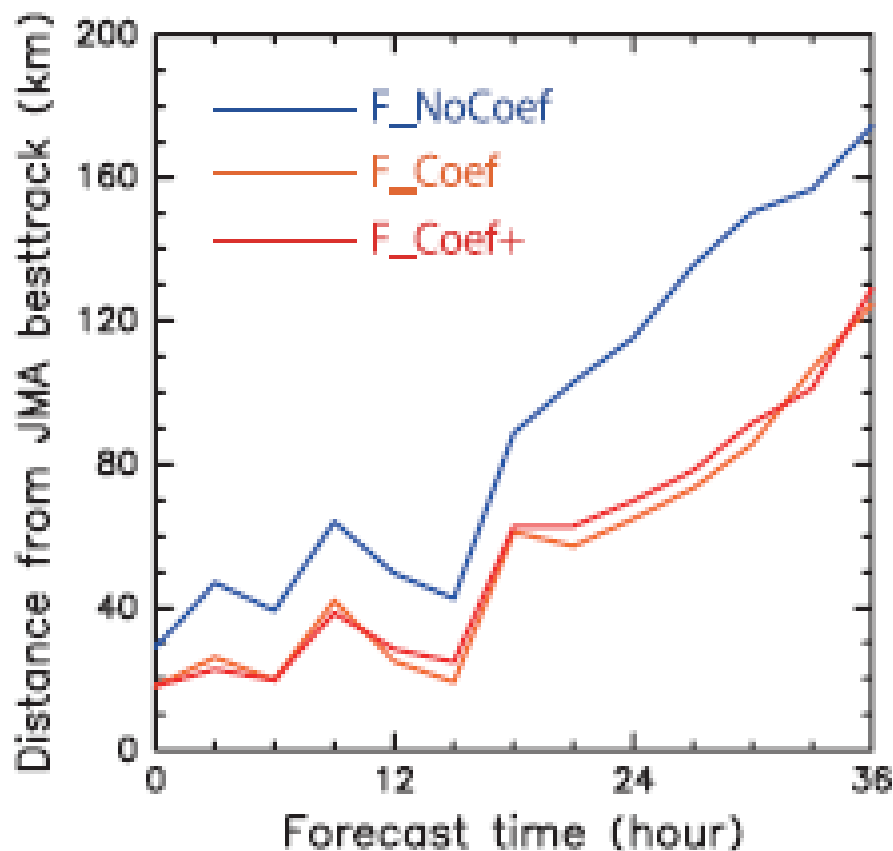
- 解析場における台風強度の再現性が向上したほか、解析時刻の中心位置のずれも改善。



台風の進路予報精度向上

- 初期値と海面交換係数の同時最適化を施した結果、進路予報の精度も向上した。

(a) Track Error (Init. time: 10/28 12:00)

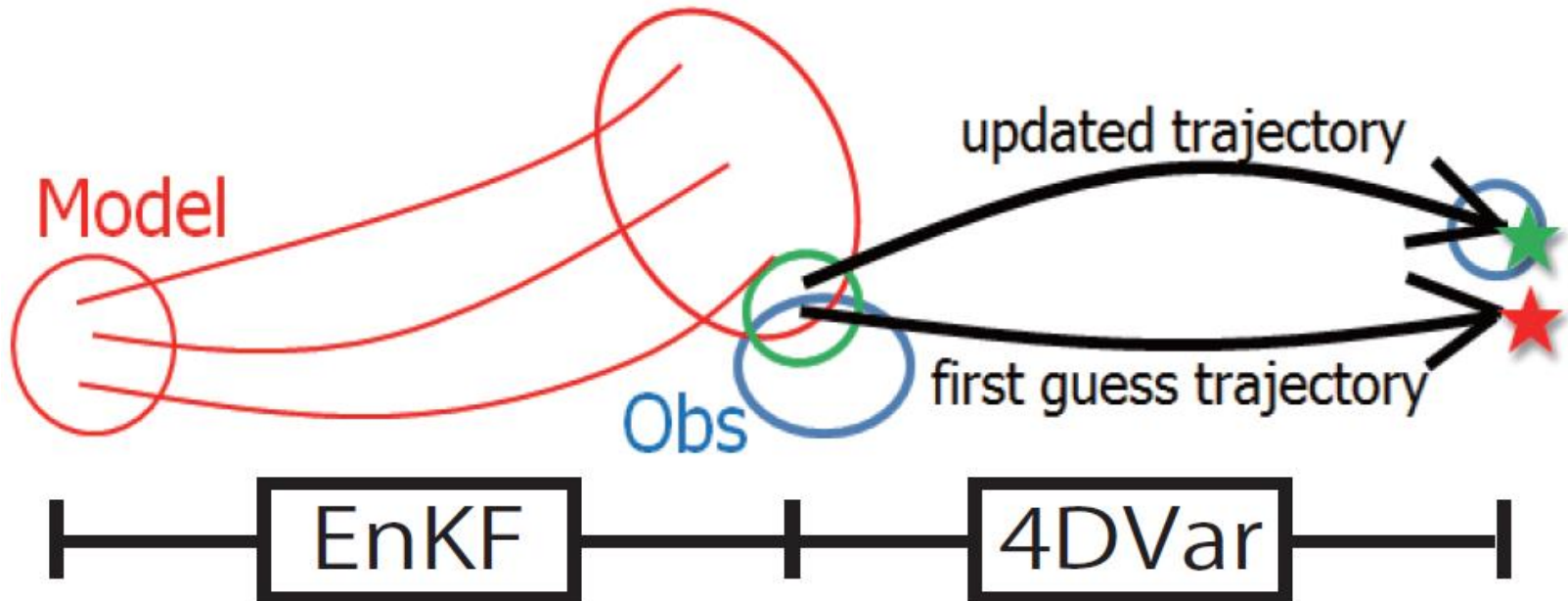


Hybridデータ同化システムの開発

Hybridデータ同化システムとは何か？

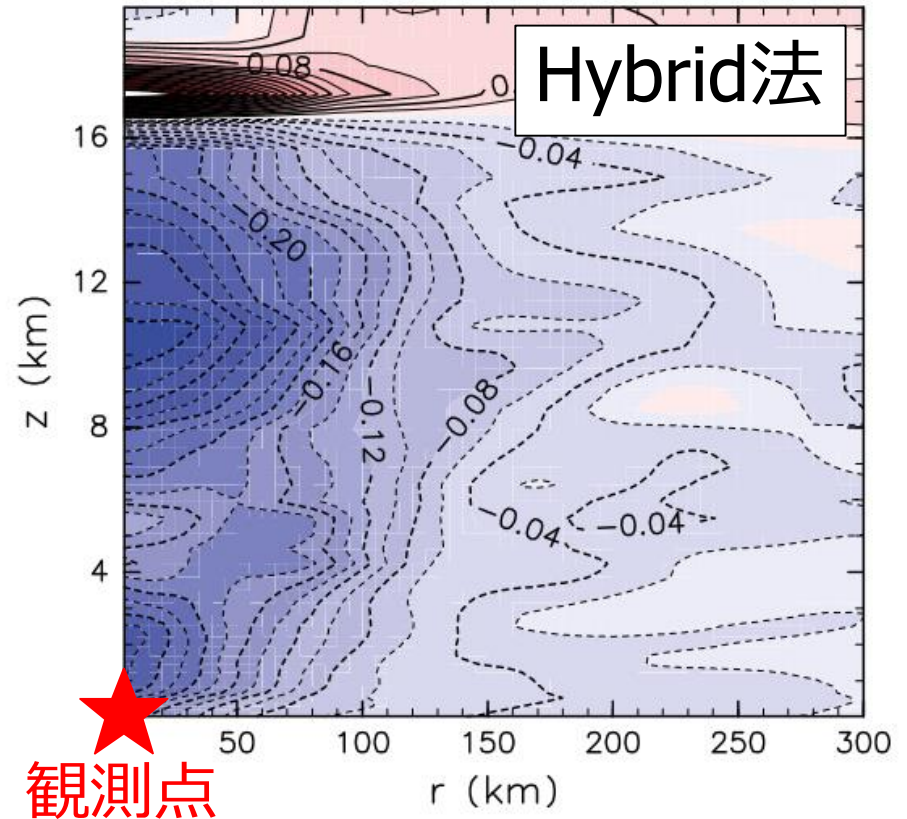
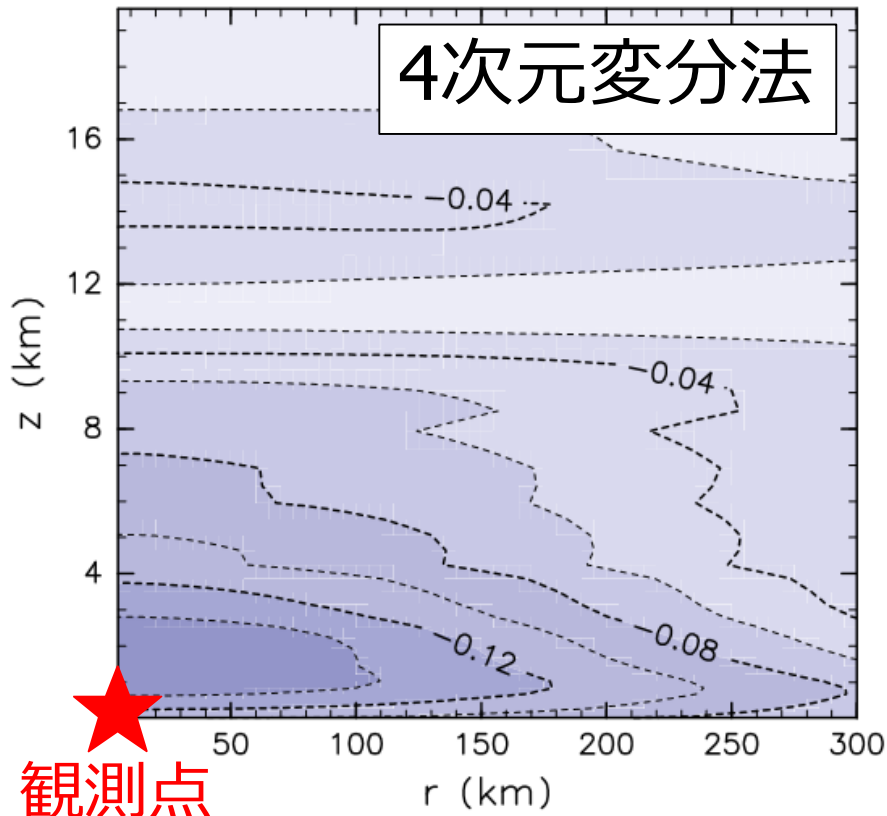
(Lorenc, 2003; Wang et al. 2007; Buehner et al. 2010a,b)

- EnKFは、背景誤差共分散行列**B**に関し、初期値及びその時間発展をアンサンブル近似によって見積もる。
- 4次元変分法は背景誤差共分散行列**B**の時間発展を正確に計算できるものの、初期値は外部から与える必要がある。通常は、気候値的に統計処理した誤差分散を用いる。
- Hybrid法は背景誤差共分散行列**B**の初期値をEnKFによって見積もり、時間発展を4次元変分法で計算する。



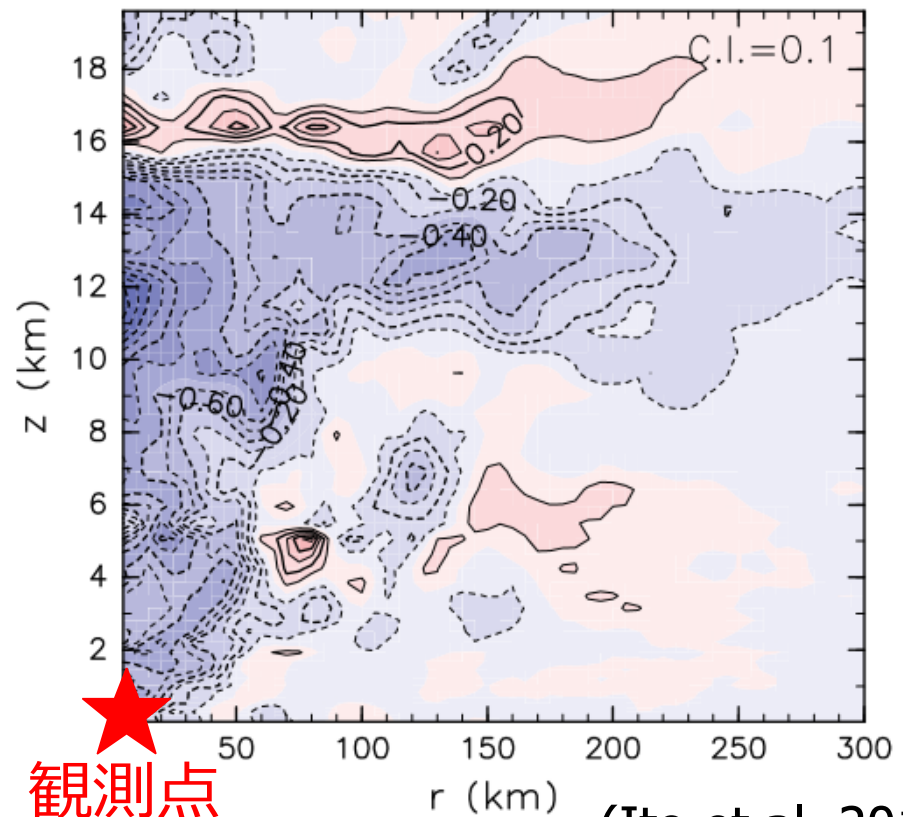
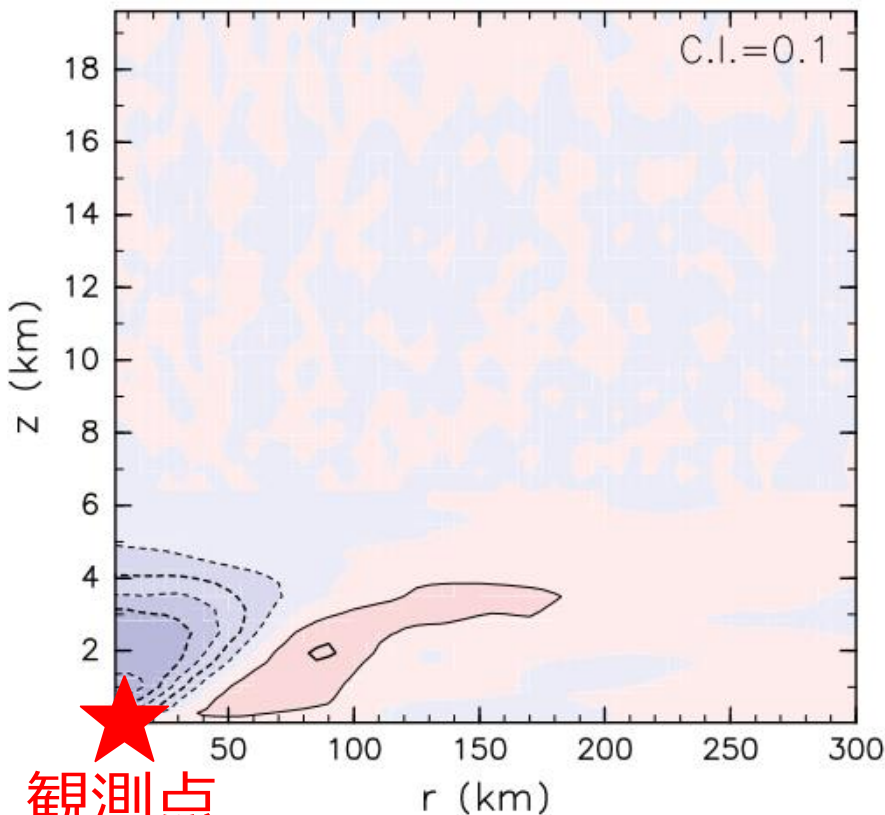
台風中心気圧が $t=3$ で観測された場合の $t=0$ における温位場の修正(円筒座標系)

- 中心気圧を上げるような観測が入った場合
 - 4次元変分法：下層を冷やす ← 台風の特徴に即していない
 - Hybrid法：上層を冷やす(暖気核を弱める)



台風中心気圧が $t=3$ で観測された場合の $t=3$ における温位場の修正(円筒座標系)

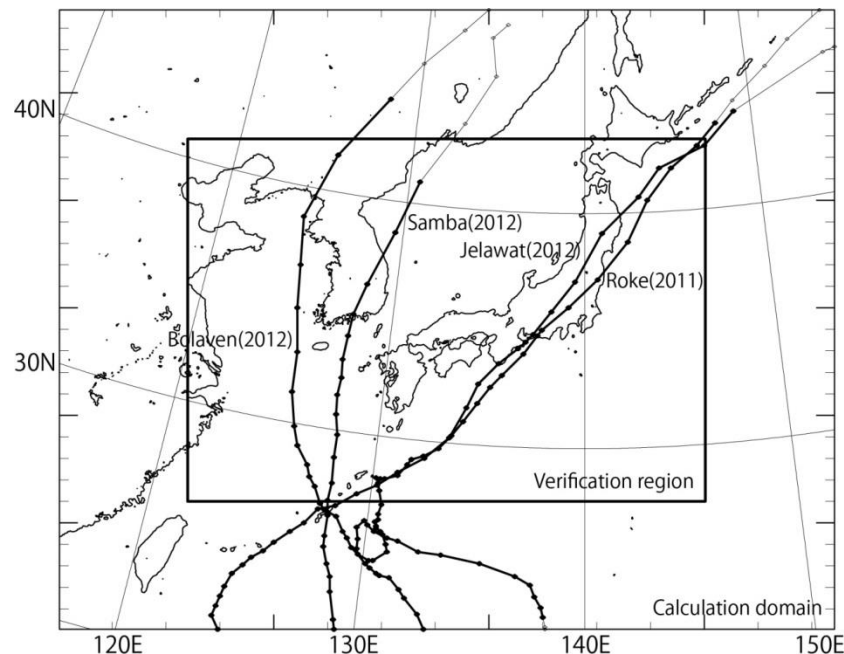
- 中心気圧を上げるような観測が入った場合
 - LETKF : 下層のみを冷やす ← 台風の特徴に即していない
 - Hybrid法 : 上層を冷やす(暖気核を弱める)



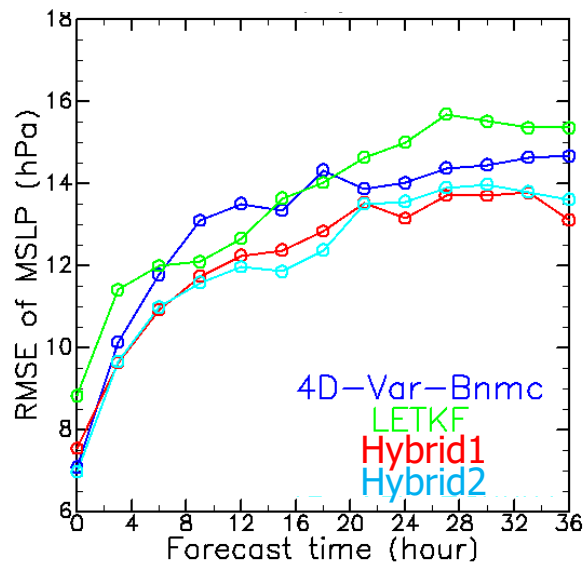
(Ito et al. 2016)

現実のデータ同化後の 台風予測誤差

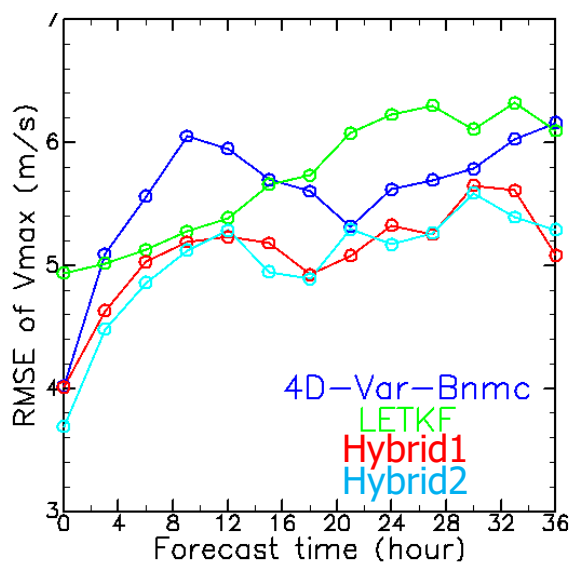
- 日本付近を通過した強い台風に関し62回の同化実験を実施。
- その初期値を用いた台風予測
- Hybrid法を用いると強度・進路ともに誤差が10%程度小さい。



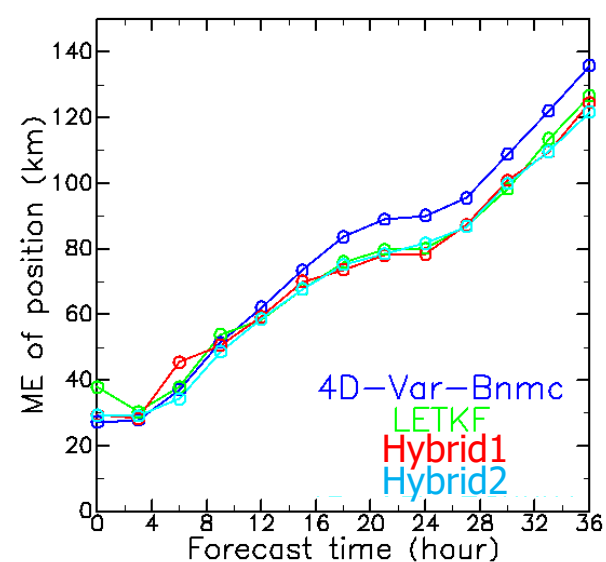
中心気圧の予測誤差



最大風速の予測誤差



進路の予測誤差



(Ito et al. 2016)