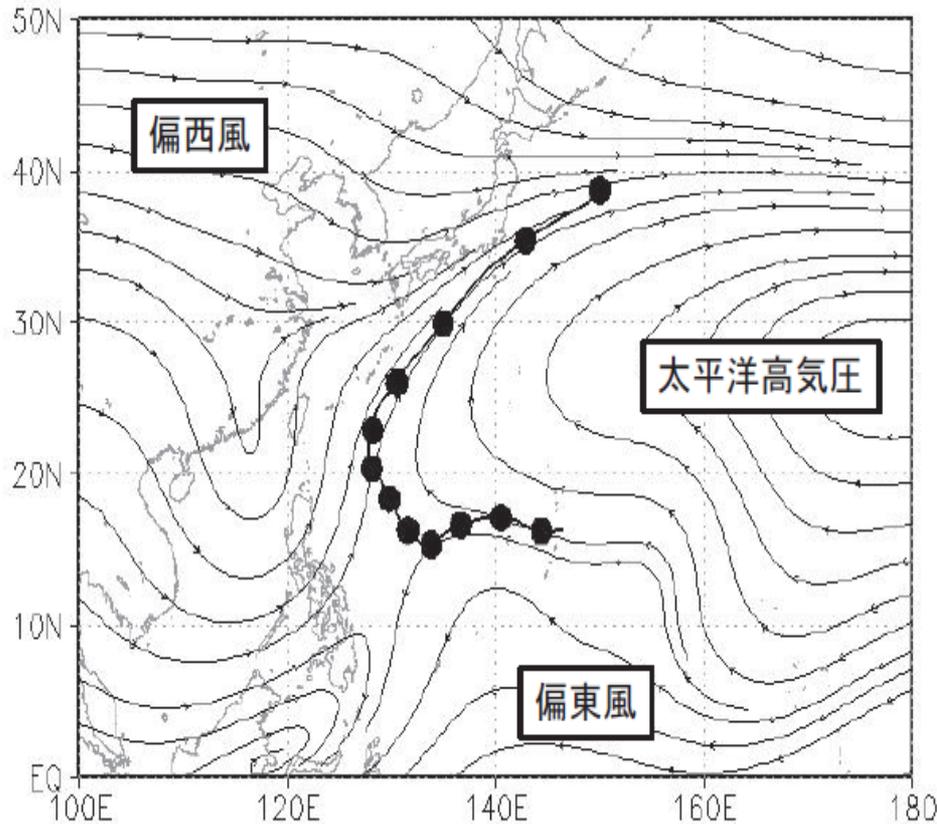


Part 3 台風ライクな水平2次元渦

上から見ても台風は興味深い

- 台風の進路

指向流・ベータジャイアなど

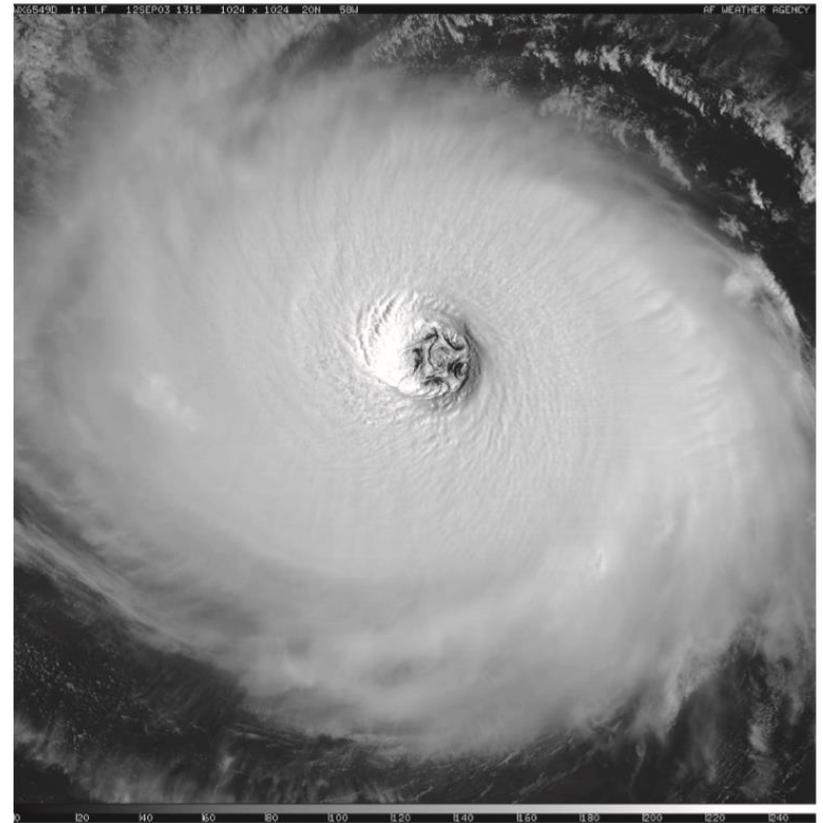


(筆保・伊藤・山口, 2014)

- 台風の構造

多角形眼(メソ渦)

レインバンドなど



(Kossin and Schubert, 2004)

**まずは簡単な渦度方程式から
始めてみる**

水平2次元非発散渦度方程式

- 簡単のために、以下のような2次元の流れを考える

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - f v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + f v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2)$$

- $\partial(2) / \partial x - \partial(1) / \partial y$ を計算すると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (f + \zeta)(\nabla \cdot \mathbf{v}) + v_x \frac{df}{dy} = 0$$

$\rightarrow \beta$

- 非発散($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$)であることを仮定すると、

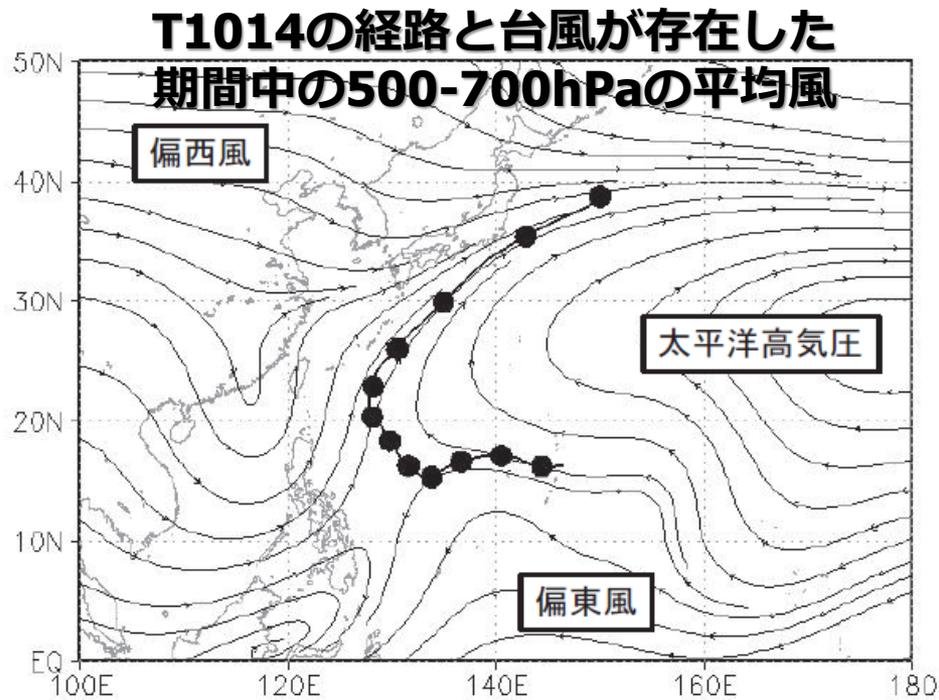
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v_x \frac{df}{dy} = 0 \rightarrow \frac{D(f + \zeta)}{Dt} = 0$$

移流項 \gg ベータ項

絶対渦度($f + \zeta$)は
移流でしか変化しない

台風進路

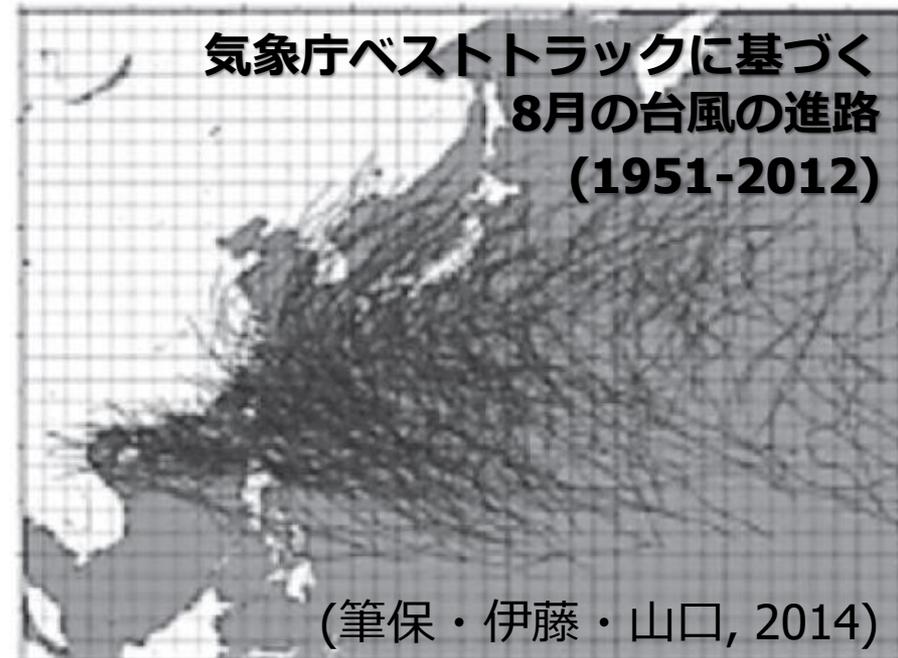
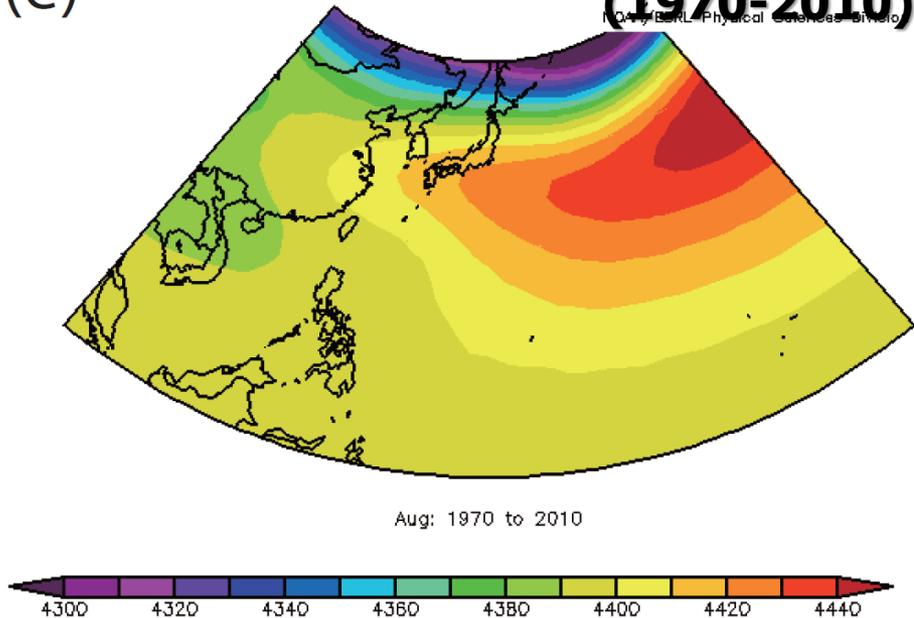
- 台風の進路は、台風周辺で吹く対流圏中層の風の向き(指向流)にほぼ一致する。
- 水平2次元の渦度で台風の進路を近似的に表現できる。



NOAA 20CRに基づく8月のGPH@600hPa (e)

20th Century Reanalysis v2
600mb Geopotential Height (m) Composite Mean
NOAA/ERL Physical Sciences Division

(1970-2010)



台風はどの高度の風に流されるか？

- 順圧非発散モデルにどの高度の風を与えると予報誤差が小さくなるか(Velden and Leslie, 1991)？

TABLE 2. 48-h mean track forecast errors (km) from various layer-mean wind analyses used to initialize the barotropic track forecast model for specified tropical cyclone intensity classes. The total number of cases is 300, which are fairly evenly distributed among intensity classes. The lowest forecast error for each intensity class is underlined.

Intensity class (hPa)	>1005	995-1005	985-995	975-985	965-975	955-965	945-955	935-945	<935
No. of cases	25	25	25	25	50	50	25	25	50
<i>Layer-means (hPa)</i>									
1000-100	389	374	367	364	367	364	347	338	324
850-200	383	365	357	355	348	339	328	326	313
850-300	371	362	355	351	331	332	<u>310</u>	<u>304</u>	<u>302</u>
850-400	343	341	349	344	<u>322</u>	<u>316</u>	334	<u>341</u>	<u>339</u>
850-500	<u>332</u>	<u>331</u>	<u>332</u>	<u>337</u>	<u>332</u>	<u>329</u>	356	360	356
700-400	348	338	347	342	345	341	361	365	368
700-500	342	<u>331</u>	340	346	359	367	372	377	372

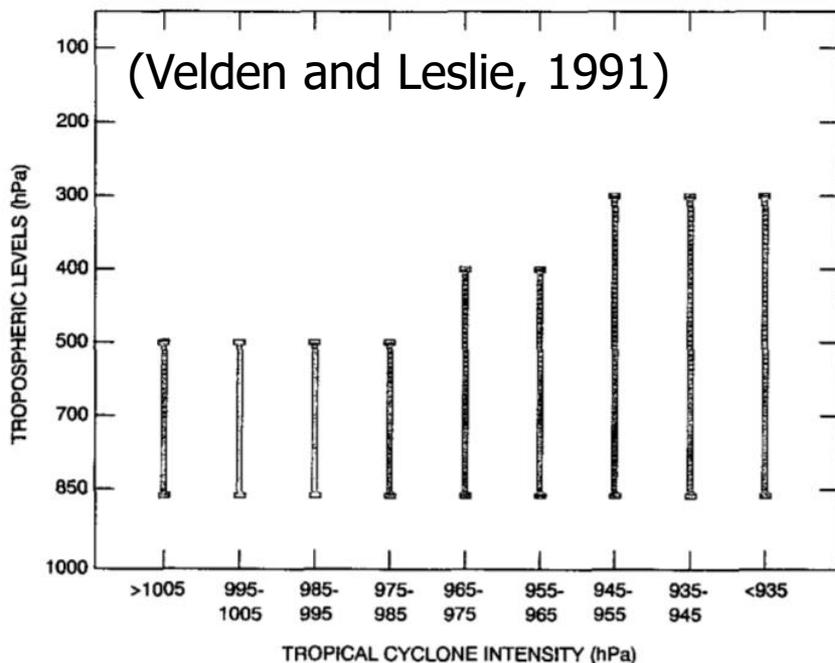


TABLE 3. Direction comparisons for various multiple bands.

Stratification	Storm Deviation from Mean Surrounding Wind (500 mb)				
	1° - 7°	1° - 9°	1°-11°	1°-13°	5° - 9°
Lat > 20°N	18°L	24°L	30°L	40°L	30°L
Lat < 20°N	14°L	12°L	15°L	24°L	7°L
Slow	23°L	31°L	37°L	48°L	39°L
Moderate	18°L	25°L	33°L	44°L	32°L
Fast	12°L	14°L	17°L	21°L	19°L
Direction A	15°L	18°L	22°L	32°L	20°L
Direction B	17°L	19°L	25°L	36°L	19°L
Direction C	15°L	21°L	25°L	32°L	23°L
Intensity 1	12°L	15°L	20°L	23°L	18°L
Intensity 2	17°L	22°L	28°L	37°L	25°L
Intensity 3	22°L	15°L	20°L	38°L	23°L
Deepening	13°L	22°L	22°L	20°L	13°L
Filling	17°L	26°L	13°L	29°L	10°L
Mean:	16.4°	20.3°L	23.6°L	32.6°L	21.3°L
σ :	3.4°	5.5°	7.0°	8.9°	8.9°
L :	Storm direction to left of mean surrounding wind				

(Gerge and Gray, 1976)

現実の進路と指向流の差

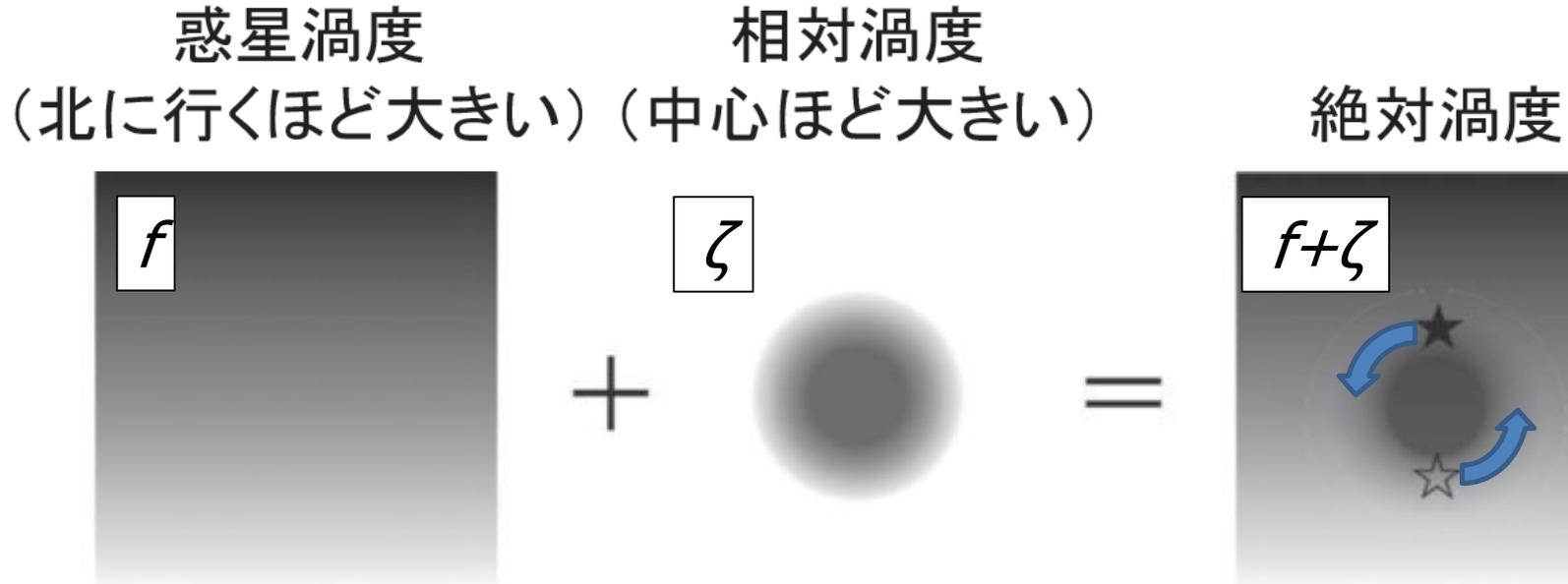
- 台風は指向流より若干($<2\text{m/s}$)西側・極側に進む。



(Carr and Elseberry, 1990; Chan 2010)

絶対渦度の保存則

- 絶対渦度 = 惑星渦度 + 相対渦度は、今考えている系ではラグランジュ的に保存する。
- 惑星渦度：北に行くほど値が大きい
- 相対渦度：中心に行くほど値が大きい
- ★地点から絶対渦度の大きな気塊が移流によって西に運ばれる。☆地点では逆に絶対渦度の小さな気塊が東に。



2次元非発散モデルで数値実験：ベータジャイア効果

- 絶対渦度は西側では正偏差、東側では負偏差
⇒風速の偏差場に直すと北西に渦が動く (Chan, 1987, 2010)
- 講演後コメント：議論になっていましたが、微小な渦度擾乱を置くと西進する単なるロスビー波で、これは非線形性によって出てくる効果です。Sutyrin and Morel (1997)などに近似解析解が記載されています。

初期時刻



中心の渦に伴う移流で絶対渦度場が捻じ曲がる

時間発展後

絶対渦度の正偏差

絶対渦度の負偏差

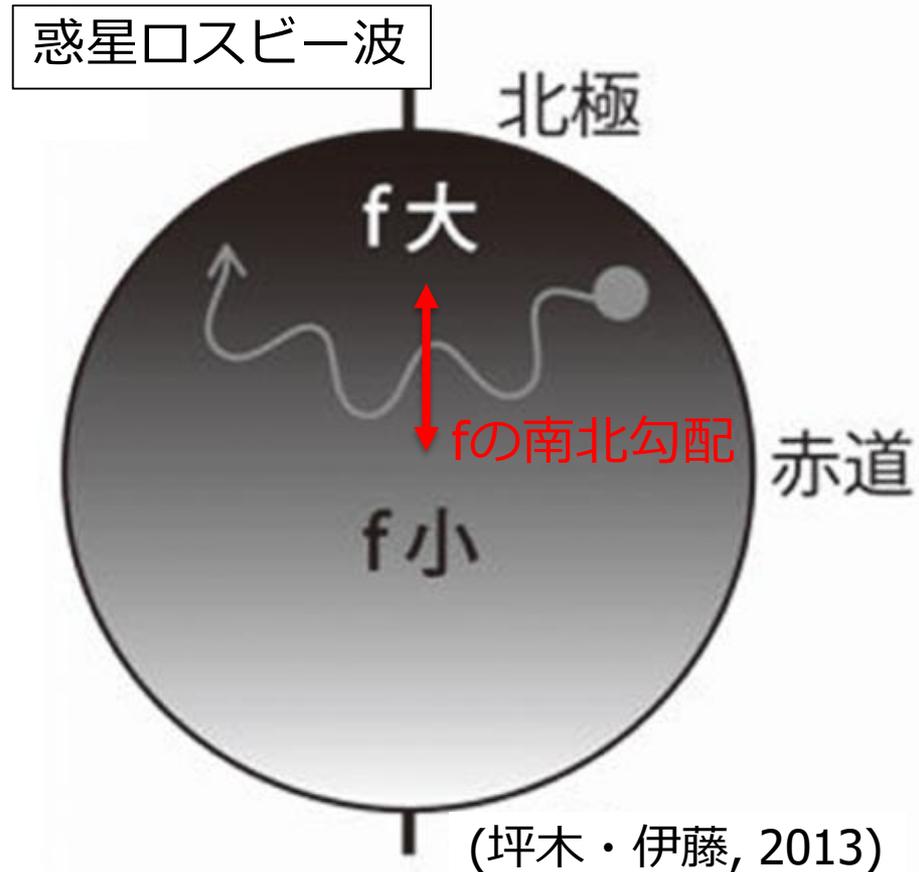
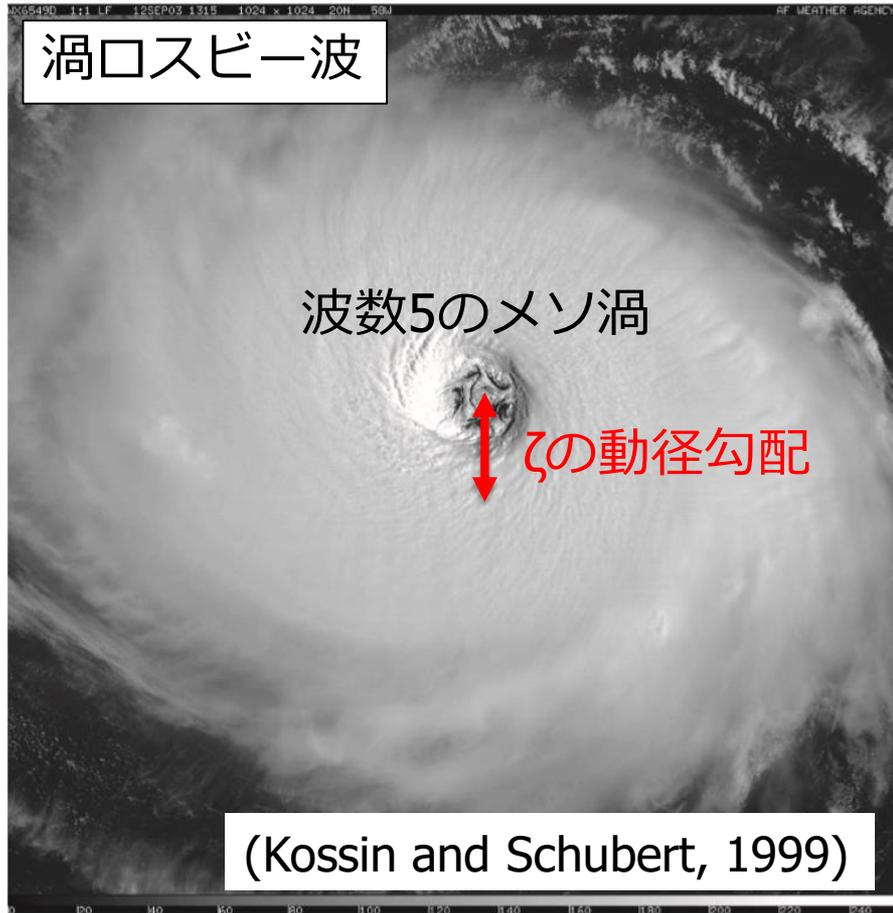


渦度の偏差は風速の偏差に直すと渦を北西に移流させる向き

(Bajar et al. 2004)

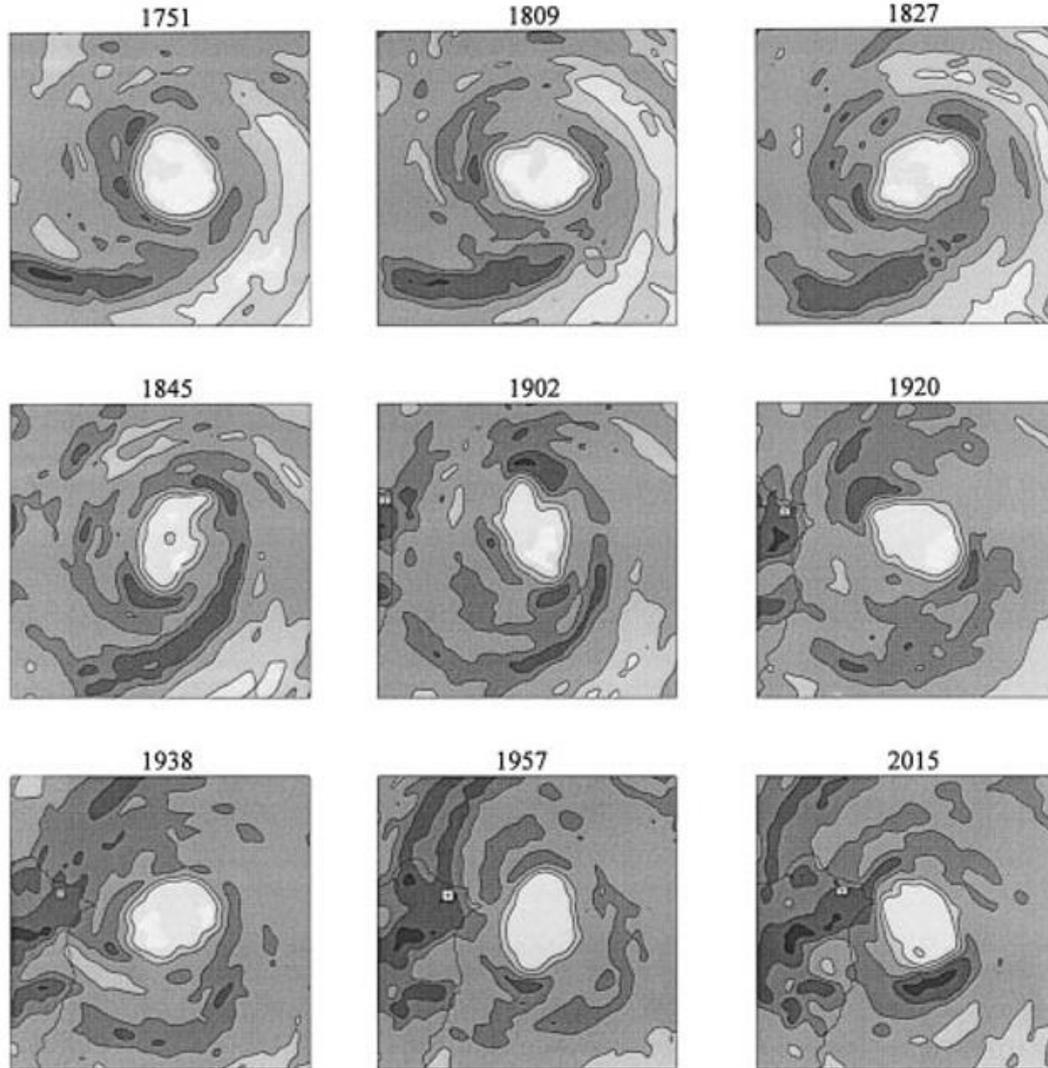
渦ロスビー波

- 基本場が渦である場合のロスビー波(基本場の渦位勾配を考えたときの、擾乱の渦位のふるまい)
- メソ渦・進路に関わる順圧不安定・多重壁雲の形成に関わっているといわれている。



楕円形の眼の回転

- 接線風速で流される場合に1回転に要する時間 50分
< 楕円型の眼が1回転するのに要した時間 144分



渦ロスビー波の定式化 (Montgomery and Kallenbach, 1997)

講演後コメント：原論文の通りでは、分散関係式導くことができないようです。また、講演中は、導出過程に「結論ありきではないか」との疑問が出ました。

2次元非発散渦度方程式、f面で非断熱加熱無し $\frac{D\zeta}{Dt} = 0$

円筒座標系における
ラグランジュ微分と
相対渦度の定義

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \zeta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0$$

基本場として接線風がrの
関数となっている場を想定

$$u = u'(r, \varphi), v = \bar{v}(r) + v'(r, \varphi)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \zeta' + \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial r} \right) u' = 0$$

角速度を定義 $\Omega = \frac{v}{r}$, 流線関数を定義

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, v = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

渦度の摂動の振舞いに関する方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \nabla^2 \psi' - \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi'}{r \partial \varphi} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\Omega} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \nabla^2 \psi' - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi'}{\partial \varphi} = 0$$

半径R近傍でWKB近似を適用する($\delta r = r - R$)

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 + \frac{d\bar{\Omega}_0}{dr} \delta r, \quad \frac{d\bar{\zeta}}{dr} = \frac{d\bar{\zeta}_0}{dr} + \frac{d^2\bar{\zeta}_0}{dr^2} \delta r, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\delta r}{R} \right)$$

波の形を仮定(係数は実数) $\psi(r, \varphi, t) = A(t) \exp \left\{ i \left(n\varphi + k(t)(r - R) - \Lambda(t) \right) \right\}$

通常の
 ωt に相当

任意の微小な δr に成り立つ恒等式

$$\frac{k}{R} (\dot{\Lambda} - \bar{\Omega}_0 n) - 2k\dot{k} - \left(k^2 + \frac{n^2}{R^2} \right) \frac{\dot{A}}{A} + i \left(\frac{\dot{k}}{R} \left(1 + \frac{\dot{A}}{A} \right) + \left(k^2 + \frac{n^2}{R^2} \right) \left(\dot{\Lambda} - n\bar{\Omega}_0 \right) - \frac{n}{R} \frac{d\bar{\zeta}_0}{dr} \right) = 0$$

波長がRに比べて十分に小さく、波数n, kは大きい $O\left(\frac{\delta r}{R}, \frac{1}{kR}\right)$ を無視(但し $\frac{n}{kR}$ は無視できない(*1))

(*1)原論文にはないがこれがないとこの結果にならない(?)

k^2 で割る

0次オーダーの虚部を0として

$\Lambda = \omega t$
として整理

$$\omega = n\bar{\Omega}_0 + \frac{n}{R} \frac{d\bar{\zeta}_0}{dr} \left(k^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)$$

$$\left(k^2 + \frac{n^2}{R^2} \right) \left(\dot{\Lambda} - n\bar{\Omega}_0 \right) - \frac{n}{R} \frac{d\bar{\zeta}_0}{dr} = 0$$

分散関係式

$$\omega = n\bar{\Omega}_0 + \frac{n}{R} \frac{(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{(k^2 + n^2 / R^2)}$$

- 位相速度

- 動径方向 $C_{pr} = \frac{\omega}{k} = \frac{n}{k} \bar{\Omega}_0 + \frac{n}{Rk} \frac{(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{(k^2 + n^2 / R^2)}$

- 接線方向 $C_{p\varphi} = \frac{\omega}{n/R} = R\bar{\Omega}_0 + \frac{(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{(k^2 + n^2 / R^2)}$

- 群速度

- 動径方向 $C_{gr} = \frac{-2kn(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{R(k^2 + n^2 / R^2)^2}$

- 接線方向 $C_{g\varphi} = \frac{\partial \omega}{\partial \left(\frac{n}{R}\right)} = R\bar{\Omega}_0 + \frac{(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{(k^2 + n^2 / R^2)^2} \left(k^2 - \frac{n^2}{R^2}\right)$

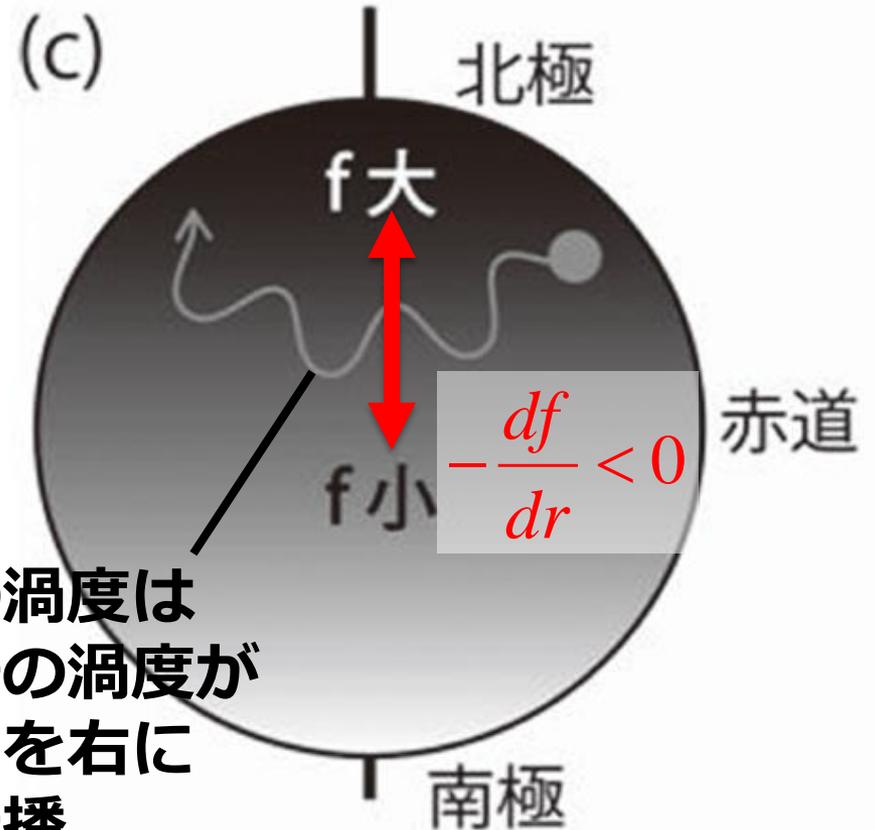
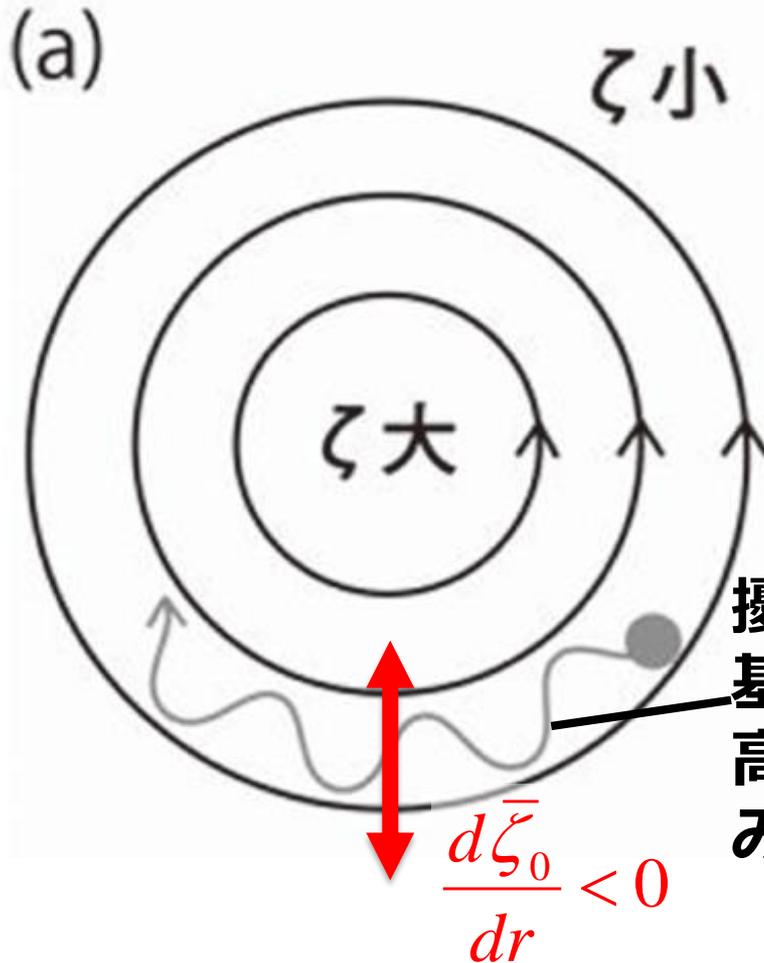
対比：回転軸の接線方向に対する位相速度

- 渦ロスビー波

$$C_{p\phi} = R\bar{\Omega}_0 + \frac{(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{(k^2 + n^2 / R^2)}$$

- 惑星ロスビー波 (Vallis, 2006)

$$C_{px} = U + \frac{(-df / dy)}{(k^2 + l^2)}$$



擾乱の渦度は
基本場の渦度が
高い方を右に
みて伝播

(板野, 2010; 坪木・伊藤, 2013)

渦ロスビー波のいくつかの特徴

$$\frac{k}{R}(\dot{\Lambda} - \bar{\Omega}_0 n) - 2kk' - \left(k^2 + \frac{n^2}{R^2}\right) \frac{\dot{A}}{A} + i \left(\frac{\dot{k}}{R} \left(1 + \frac{\dot{A}}{A}\right) + \left(k^2 + \frac{n^2}{R^2}\right) \left(\dot{\Lambda} - n\bar{\Omega}_0\right) - \frac{n}{R} \frac{d\bar{\zeta}_0}{dr} \right)$$

$$\left(\frac{\dot{\Lambda} - n\bar{\Omega}_0}{R^4} + \frac{n^2}{R^2} \frac{\partial r}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{R} - i \left(\left(\frac{k^2}{R^2} \right) \left(\frac{n}{\partial r} + k \right) + \frac{\dot{\Lambda} - n\bar{\Omega}_0}{R} - \frac{n}{R^2} \frac{dr}{dr} + \frac{R^2 \left(1 + \frac{\dot{A}}{A}\right)}{R^4} \left(\frac{\dot{\Lambda} - n\bar{\Omega}_0}{R} + \frac{n}{R} \frac{dr^2}{dr^2} \right) \right) \frac{\partial r}{\partial r} = 0$$

k^2 で割る

波長がRに比べて十分に小さく、波数n, kは大きい $\frac{\delta r}{R} \approx 0, \frac{1}{kR} \approx 0$ (但し $\frac{n}{kR}$ は無視できない(*1))

1次オーダーの虚部を0として

$$\left(k^2 + \frac{n^2}{R^2}\right) \left(n \frac{\partial \bar{\Omega}_0}{\partial r} + \dot{k}\right) = 0$$

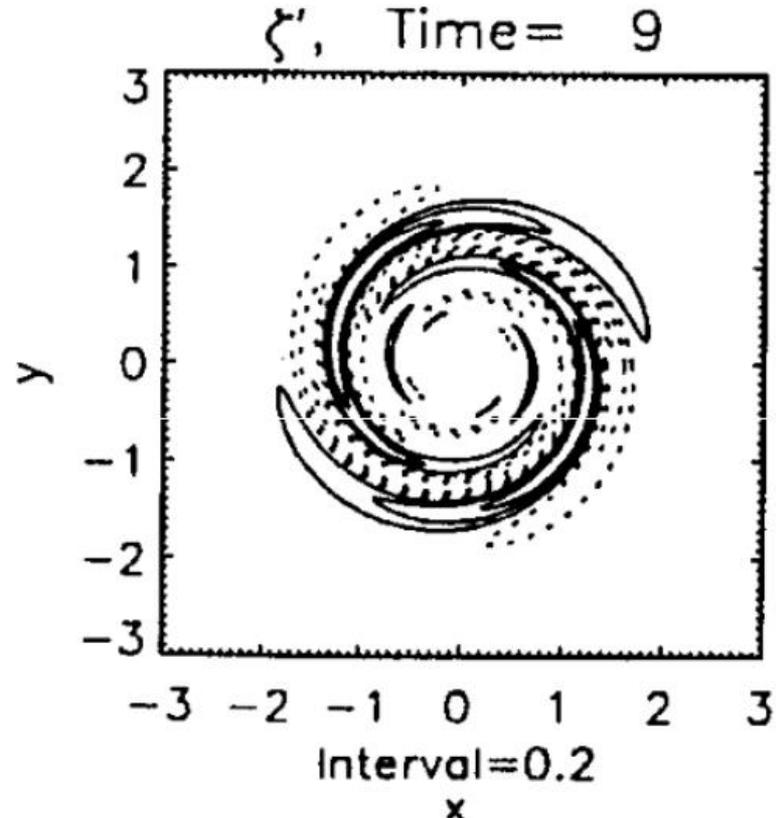
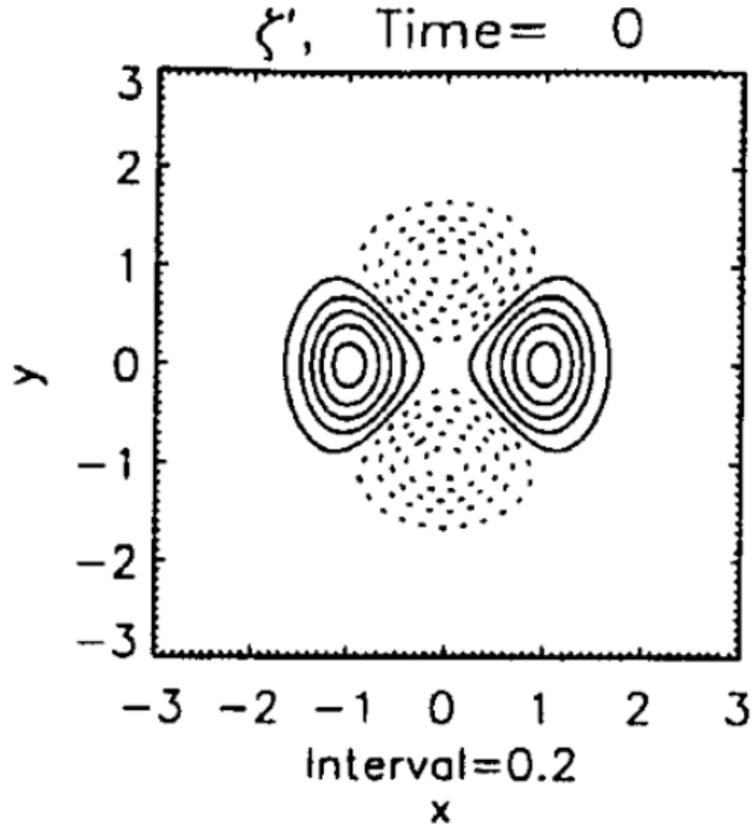
自明で無い解

$$k(t) = k(0) - n \frac{\partial \bar{\Omega}_0}{\partial r} t$$

講演後コメント：1次のオーダーからkの時間変化を出すことが「解せない」という参加者の方がいました。

動径波数は時間を追って増加

- 角速度が異なることにより、渦度摂動の動径波数は大きく(波長は短く)なる (コメント参照)



(Montgomery and Kallenbach, 1997)

講演後コメント：伊藤はこの図上の波数を考えてしまっていたが、WKB近似を採用した時点で、波数の変化は局所的な特徴と捉えるべきとのコメントをいただきました。論文中ではWave-packetで考えています。

滞留半径(Stagnation radius)

- 動径波数は $k(t) = k(0) - n(\partial\bar{\Omega}_0 / \partial r)t$ のように時間変化する
- 基本場の角速度が中心で極大を持ち単調減少 ($\partial\bar{\Omega}_0 / \partial r < 0$) する渦を考えると、十分に時間が経過した後は、
 - 接線方向の波数 n が正ならば、 k は正の大きな値
 - 接線方向の波数 n が負ならば、 k は負の大きな値

- 動径方向の群速度は $C_{gr} = \frac{-2kn(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{R(k^2 + n^2 / R^2)^2}$ なので、

$d\bar{\zeta}_0 / dr < 0$ とすると、十分な時間が経過すると、外向きになり、 k^3 に反比例するため、動径方向の群速度が遅くなる。

- 群速度を時間積分すると

$$r_s = \lim_{t \rightarrow \infty} r = R + \frac{(d\bar{\zeta}_0 / dr)}{R(d\bar{\Omega}_0 / dr)} \frac{1}{k_0^2 + n^2 / R^2}$$

擾乱のエネルギーはこの位置に滞留することが予想される。

波と流れの相互作用

- 簡単のためf面を考え、密度は一定とする

絶対角運動量の方程式
(軸対称は仮定しない)

$$\frac{\partial M}{\partial t} + u \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial M}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + rF_{\varphi}$$

質量保存則

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$$

フラックス形式

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot (M\mathbf{V}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + rF_{\varphi}$$

MとVを接線方向平均<>と偏差(')に分ける

方程式全体に接線方向平均をかける

$$\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial t} = - \underbrace{\frac{\partial (r \langle u \rangle \langle M \rangle)}{r \partial r}}_{\text{mean-flow contribution}} - \underbrace{\frac{\partial (r \langle u' M' \rangle)}{r \partial r}}_{\text{eddy contribution}} + \langle r F_{\varphi} \rangle$$

波と流れの相互作用：渦運動エネルギー

水平 2 次元で傾度風平衡を基本場とし、粘性・拡散・摩擦項を無視して、

$$(1) \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial u'}{\partial \phi} - \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) v' = 0, \quad (2) \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial v'}{\partial \phi} + \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) u' = 0.$$

$$u' \times (1) + v' \times (2) \longrightarrow$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} v'^2 \right)}{\partial t} = \left(\frac{\bar{v}}{r} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) u' v' - \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} v'^2 \right)}{\partial \phi}$$

接線方向の平均値 $\langle \rangle$ を考える \longrightarrow

渦運動エネルギーの定義 $K' = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2)$ 角運動量の定義 $\bar{\Omega} = \frac{\bar{v}}{r}$ \longrightarrow

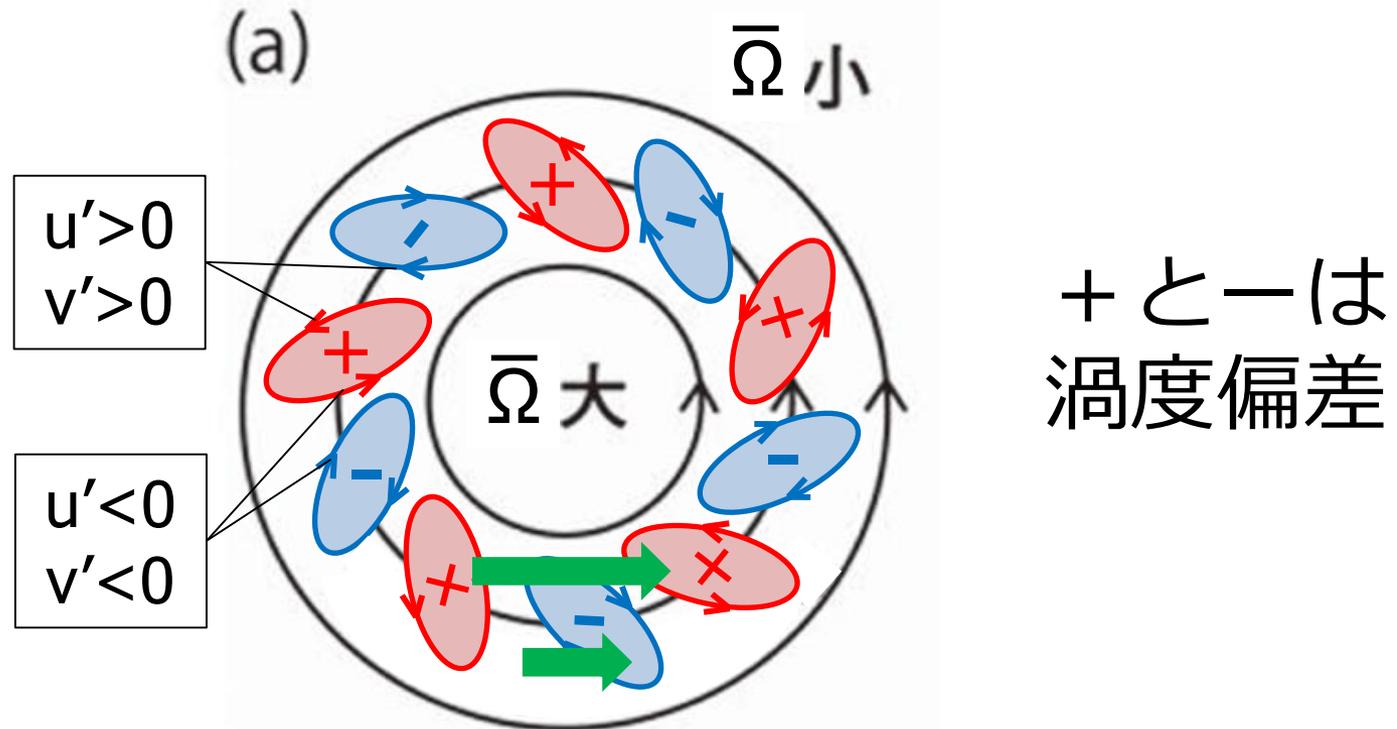
$$\frac{\partial \langle K' \rangle}{\partial t} = - \left(r \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r} \right) \langle u' v' \rangle$$

波と流れの相互作用：擾乱の成長

- 擾乱の運動エネルギーに関する下記の式は

$$\frac{\partial \langle K' \rangle}{\partial t} = - \left(r \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial r} \right)^{<0} \langle u'v' \rangle$$

擾乱の構造が基本場のシアに対して抗っているときに $\langle u'v' \rangle > 0$ で擾乱のエネルギーが大きくなる。



**もうちょっと現実的な
渦位方程式を考えてみる**

渦位方程式

- 渦位 $P = \frac{\zeta_a \cdot \nabla \theta}{\rho}$

- 摩擦や非断熱加熱がある場合の渦位方程式

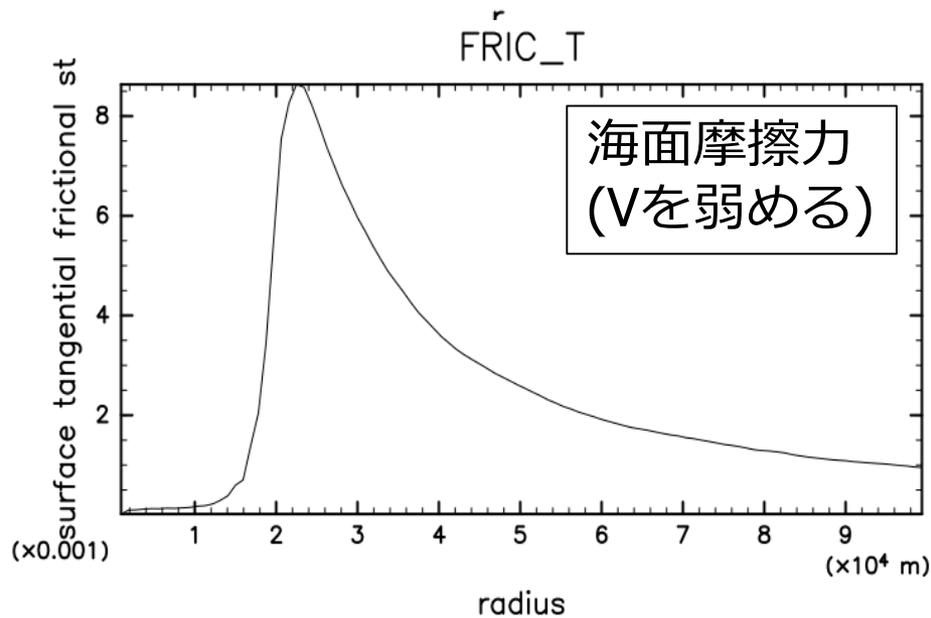
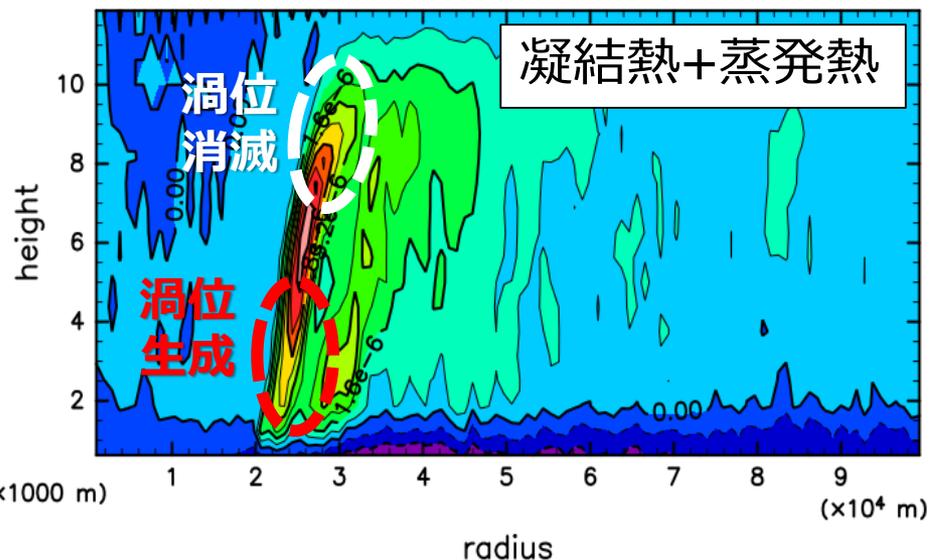
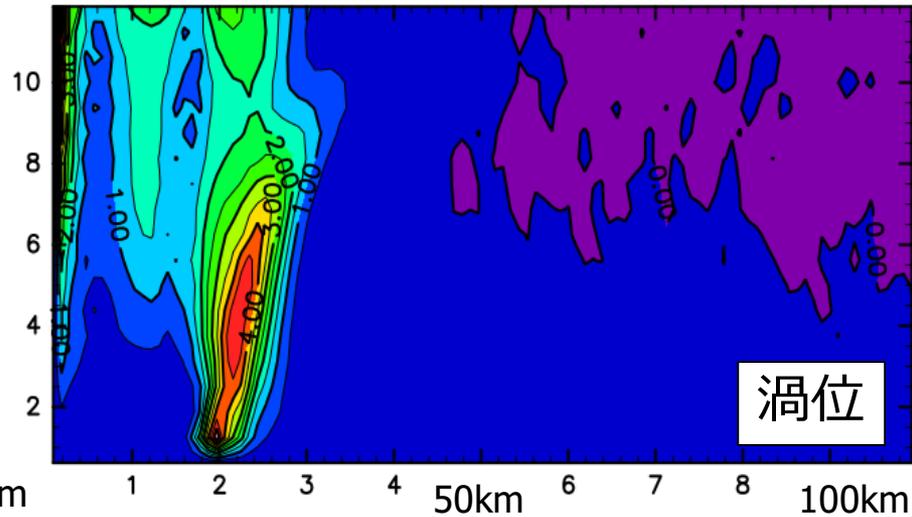
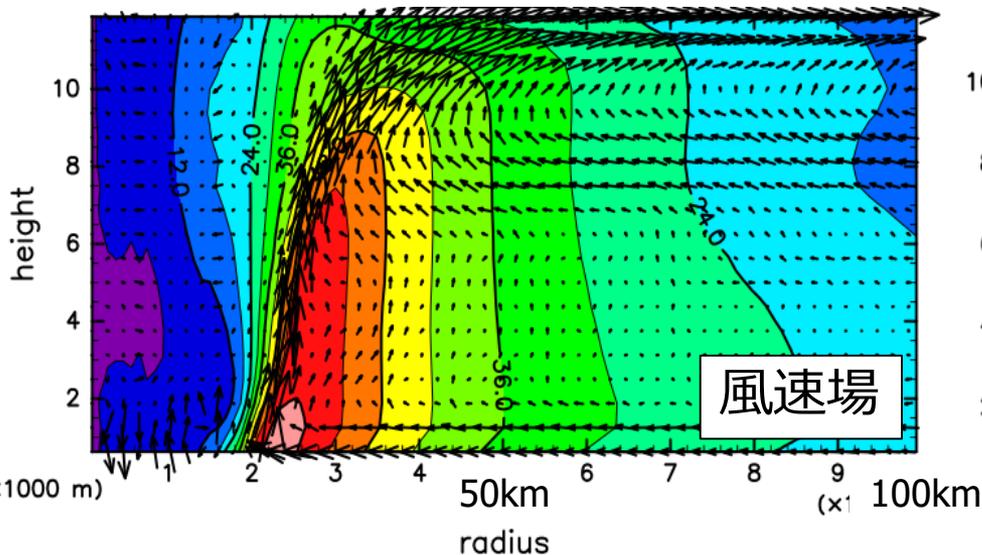
$$\frac{DP}{Dt} = \underbrace{\frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \nabla \theta}_{\text{摩擦による渦位の変化}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \left[\zeta_a \cdot \nabla \left(\frac{\theta_0 \dot{Q}}{C_p T_0} \right) \right]}_{\text{非断熱加熱による渦位の変化}}$$

摩擦による渦位の変化 非断熱加熱による渦位の変化

- 右辺の主要項は非断熱加熱の $\partial/\partial z$ に関する項

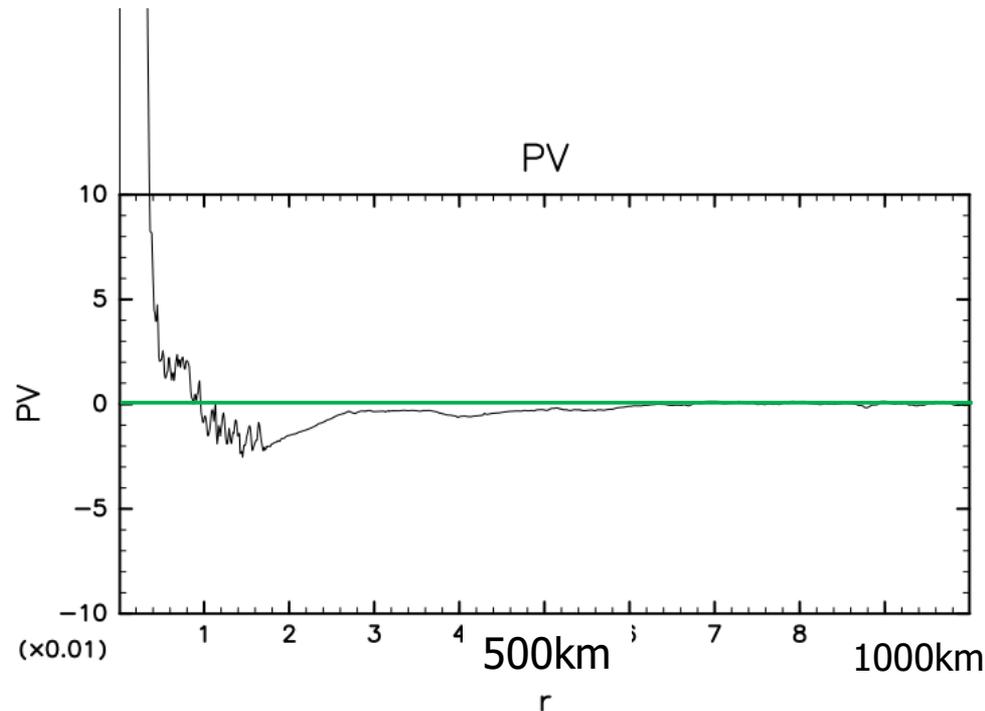
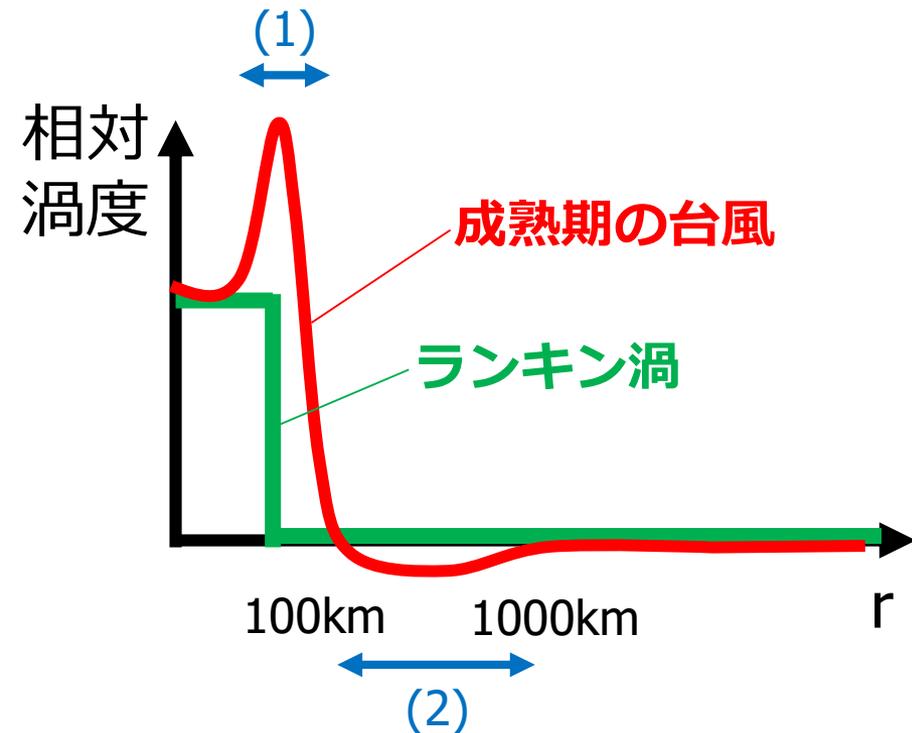
$$\frac{DP}{Dt} \propto (f + \zeta) \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial z} \right)$$

非静力学軸対称台風モデルの出力



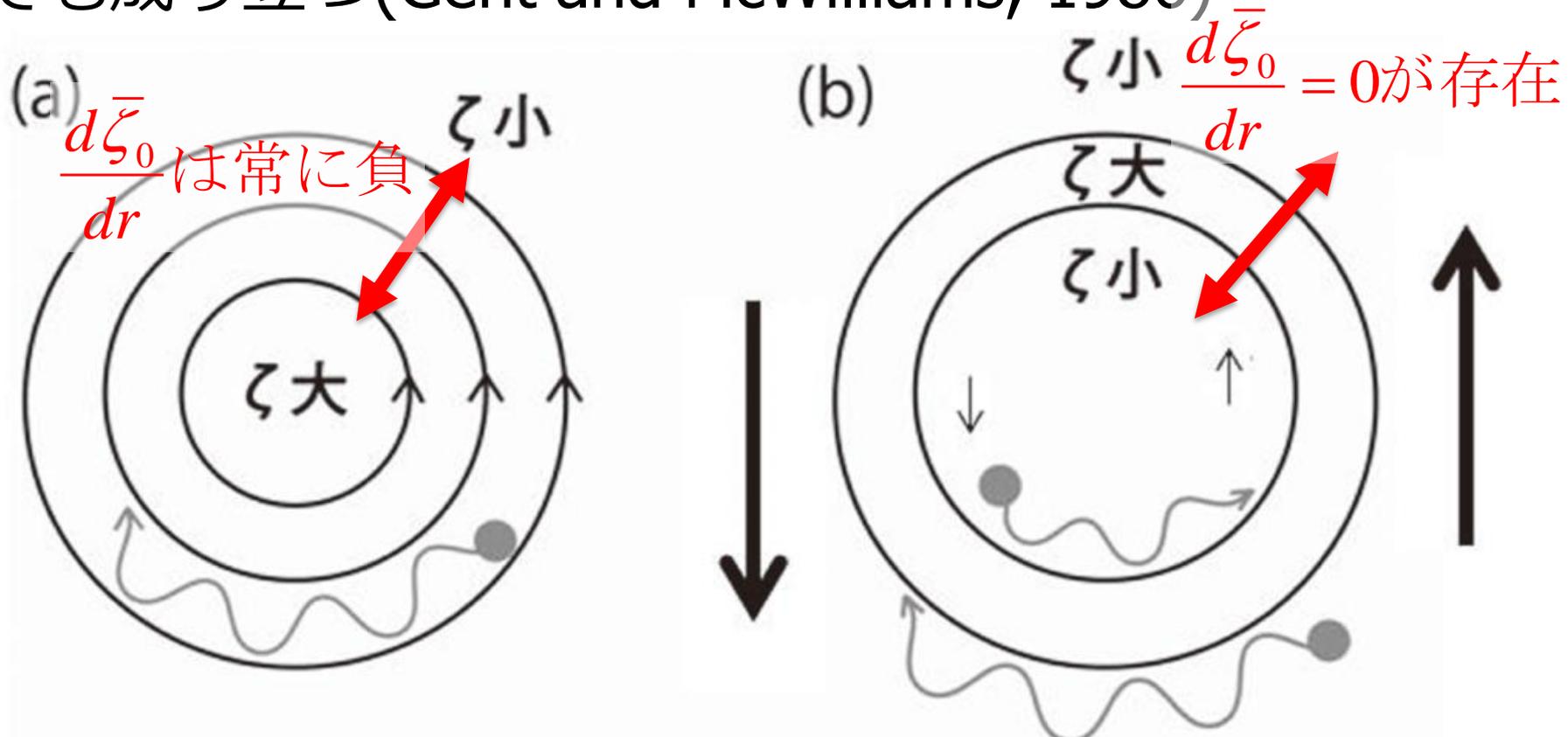
ランキン渦 VS 成熟期の台風ライクな渦

- ランキン渦(中心付近で渦度が正の定数で外側で0)が台風を近似する渦としてしばしば用いられるが、成熟期の台風では壁雲域に極大、外側では負の値をとる。
- 台風を広いスケールで見る場合や、発生・発達期の台風に関しては中心付近に極大値があるとしてよいかもしれない
- 渦度の動径勾配が向きを変えるのが、(1)と(2)の2か所に。



順圧不安定：Rayleigh-Kuoの条件

- 渦度の動径勾配($\partial\zeta/\partial r$)が領域中で0になることが順圧不安定で擾乱が成長する必要条件
- 基本場が渦のとき、その中で成長する擾乱に対してでも成り立つ(Gent and McWilliams, 1986)

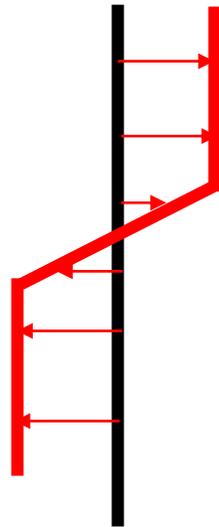


(板野, 2010; 坪木・伊藤, 2013)

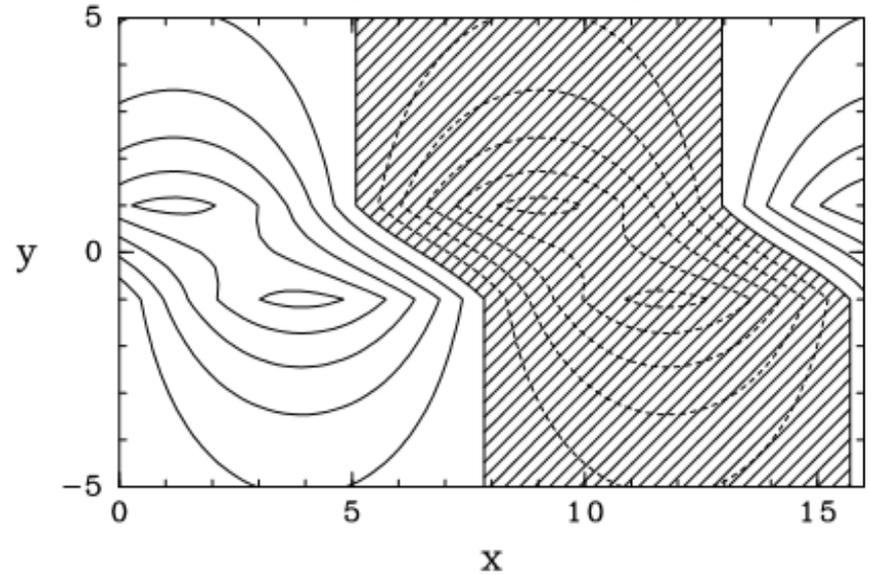
順圧不安定で成長する擾乱の構造(f面)

2点折れ線
モデル
(石岡, 1994)

基本場の東西風

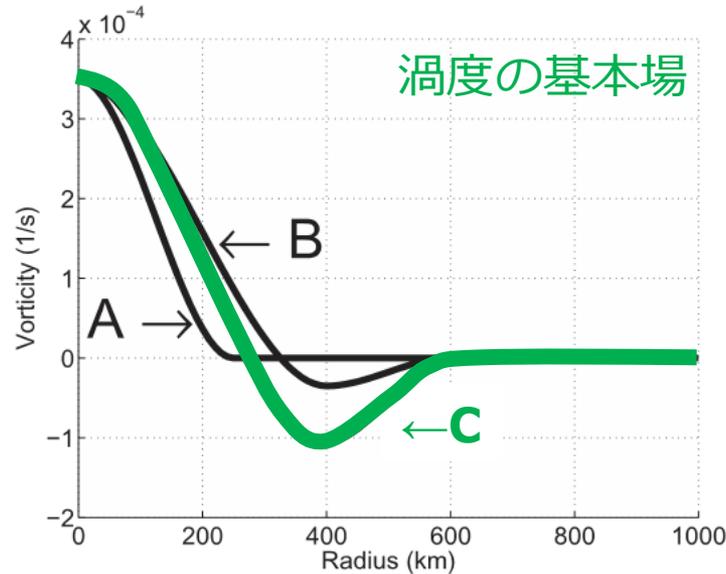


順圧不安定で成長する擾乱の構造

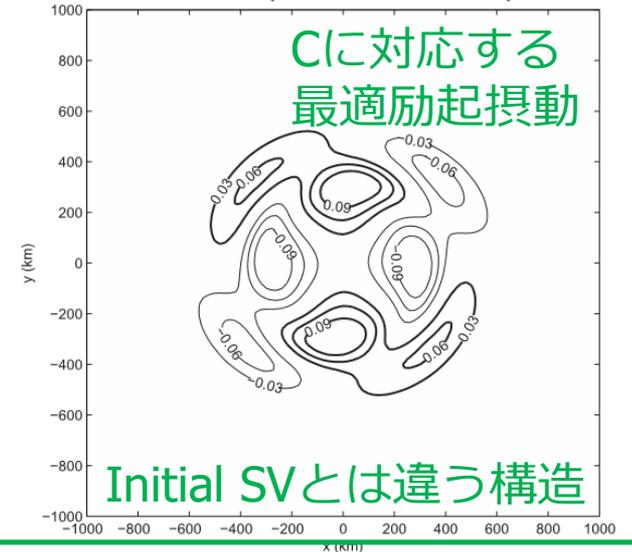


順圧非発散
モデル
(Yamaguchi and Nolan, 2011)

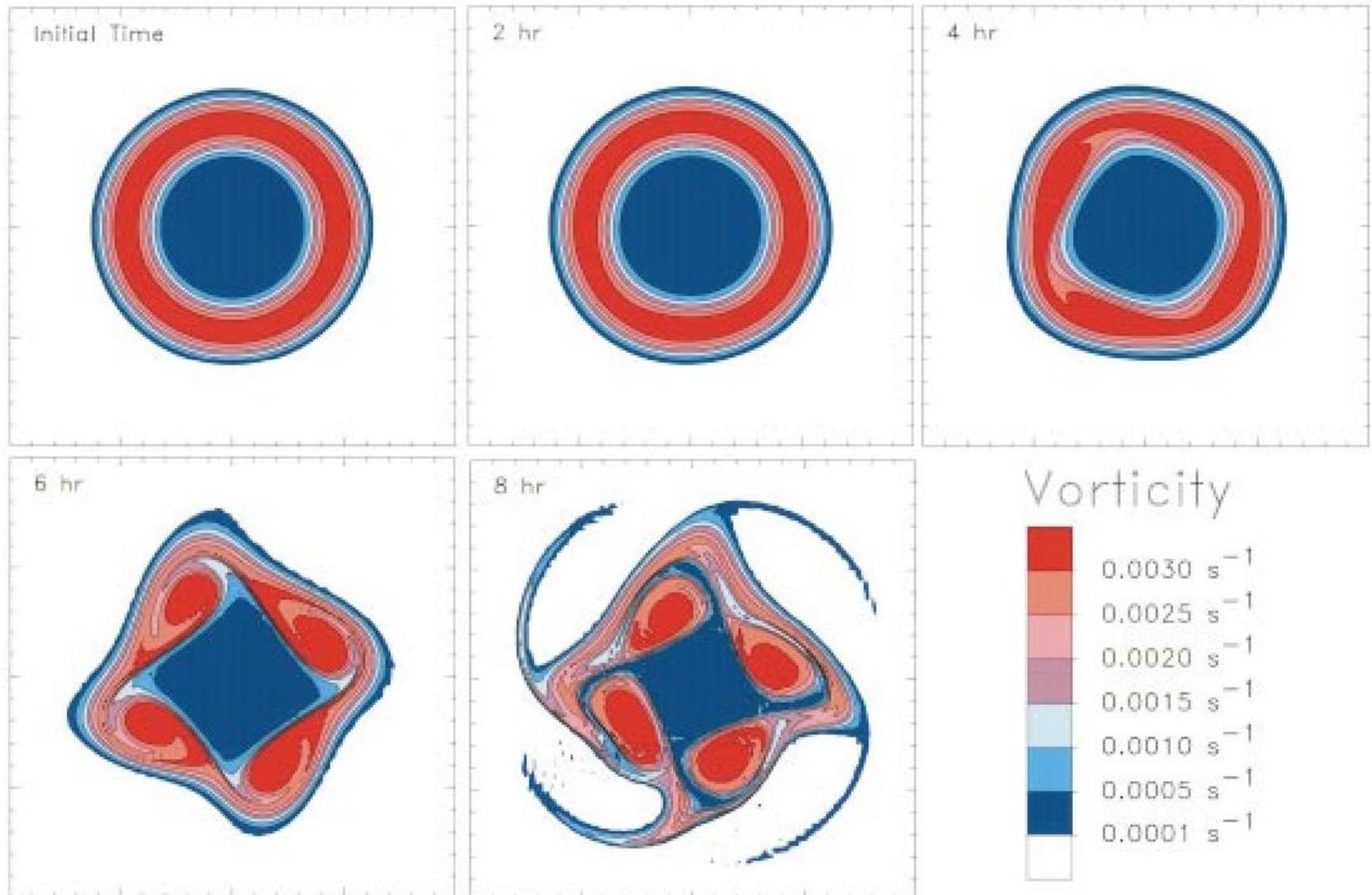
渦度の基本場



Evolved SV at optimization time (24 hours)



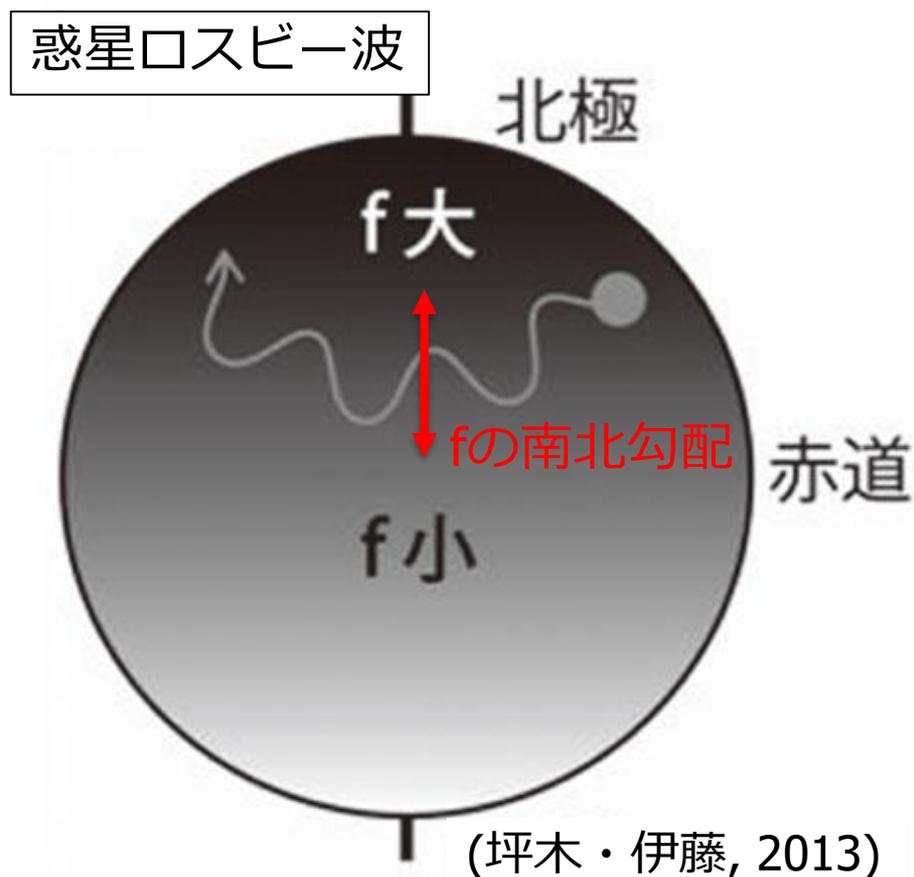
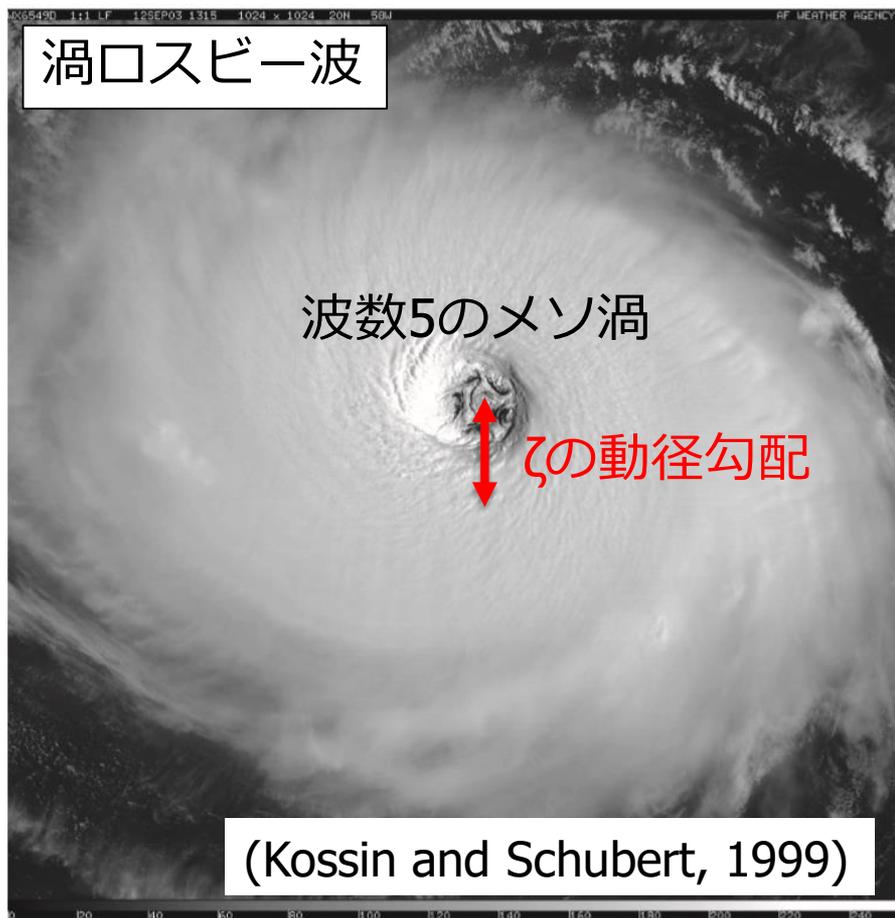
順圧不安定に伴うメソ渦の生成



(Schubert et al., 1999)

渦ロスビー波

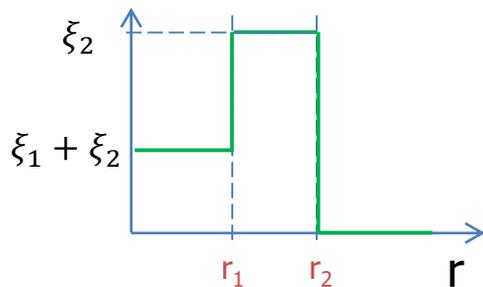
- 基本場が渦である場合のロスビー波(基本場の渦位勾配を考えたときの、擾乱の渦位のふるまい)
- メソ渦・進路に関わる順圧不安定・多重壁雲の形成に関わっているといわれている。



渦ロスビー波の理論的研究

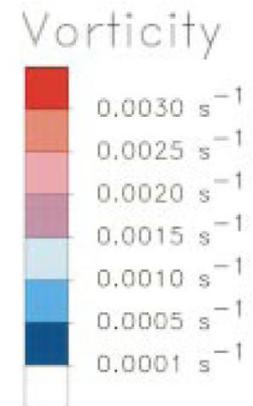
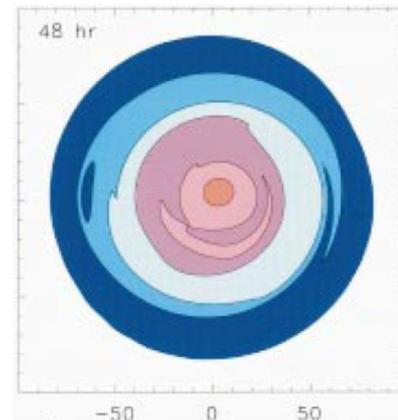
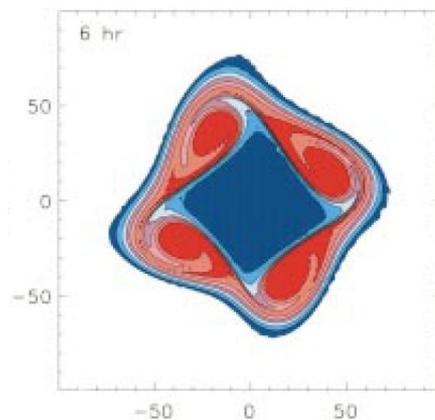
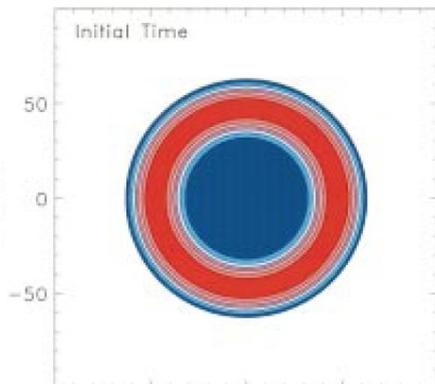
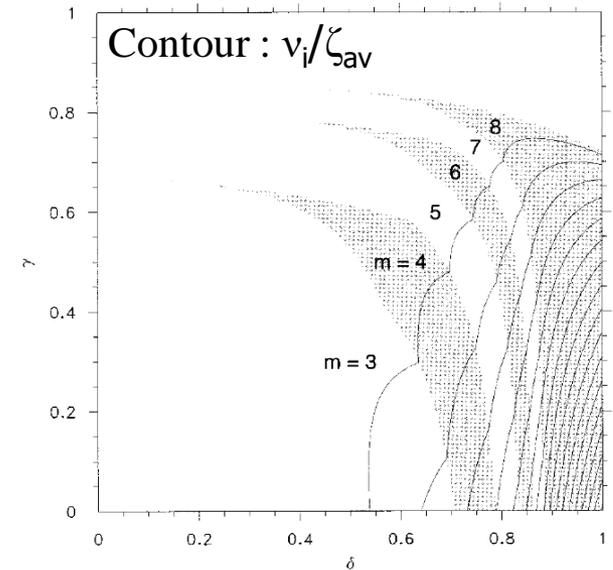
- The barotropic instability in tropical cyclone (Schubert et al. 1999)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \nabla^2 \psi' - \frac{\partial \psi'}{r \partial \phi} \frac{d\bar{\zeta}}{dr} = 0,$$



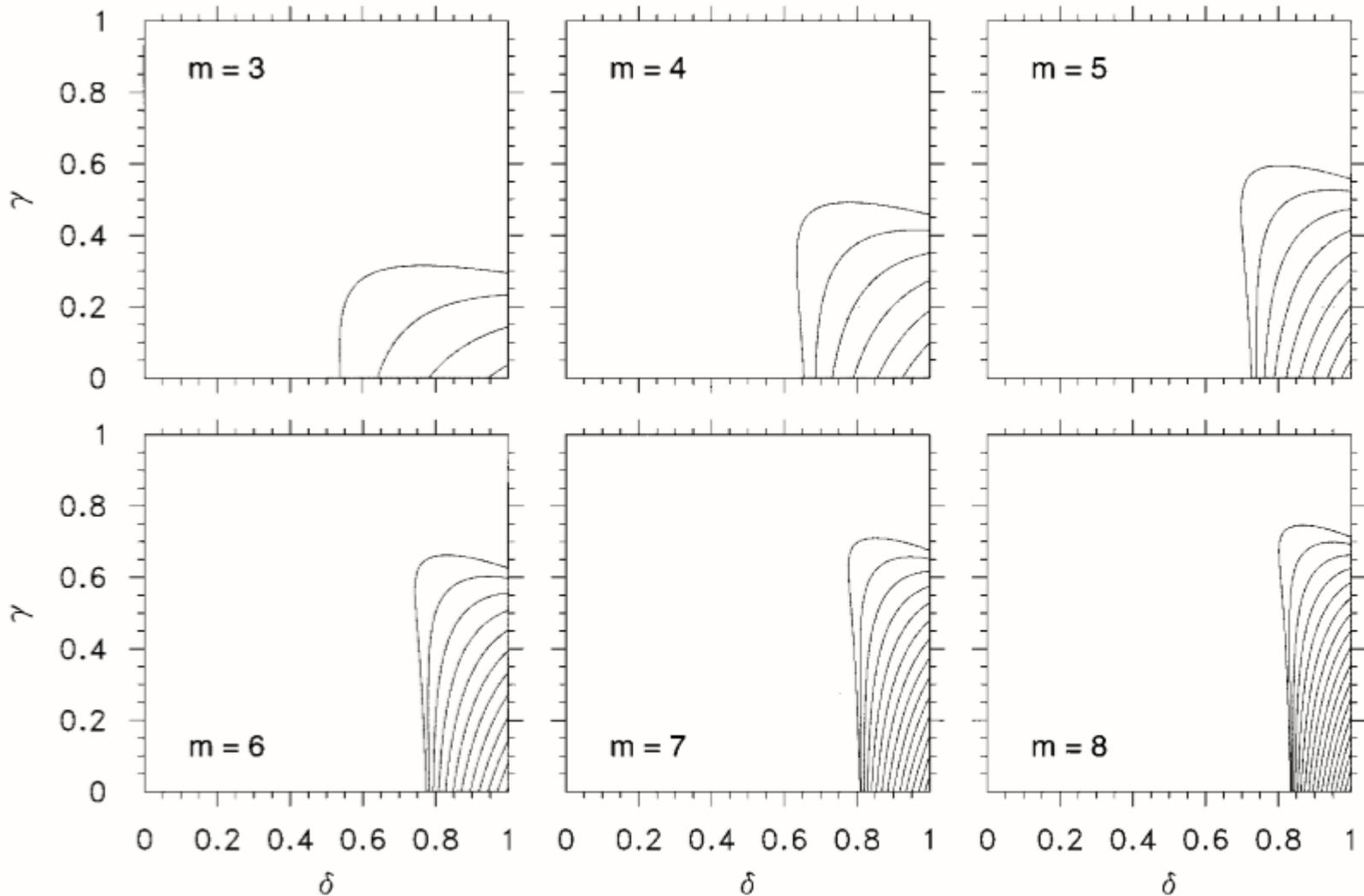
$$\delta = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\gamma = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\delta^2 \xi_1 + \xi_2}$$



渦ロスビー波の成長率

眼の領域の渦度の相対的な大きさ



高渦度領域の相対的な薄さ

(Schubert et al., 1999)

まとめ：台風ライクな水平2次元渦

- 台風の進路を順圧非発散モデルで表現
 - 指向流でおおむね進路は決まる
 - ベータジャイア効果
 - 表現できない効果としては非断熱加熱など
- 渦ロスビー波
 - 基本場を大きなスケールの渦としたときの、それより小さなスケールの渦度摂動の振舞い。
 - 基本場の流れに相対的な位相速度は基本場の渦度が大きい方を右に見て伝播する。
(通常の惑星ロスビー波との類似)
 - 中心から外側に伝播するとき、群速度がゆっくりになってある半径に滞留する。
 - 台風の進路、外側壁雲の形成、壁雲近傍のメソ渦などとの関連が議論されている。

基礎編を終えて・・・

- 台風をGFD的に捉える面白さが伝わったのであればうれしい。
- 成熟期の台風の基本はここまで述べてきたようにそれなりに整理されているが、
 - 台風の発生
 - 台風の急発達
 - 多重壁雲やレインバンドなどの構造
 - 環境場との相互作用などは、まだ十分に整理されていない印象。

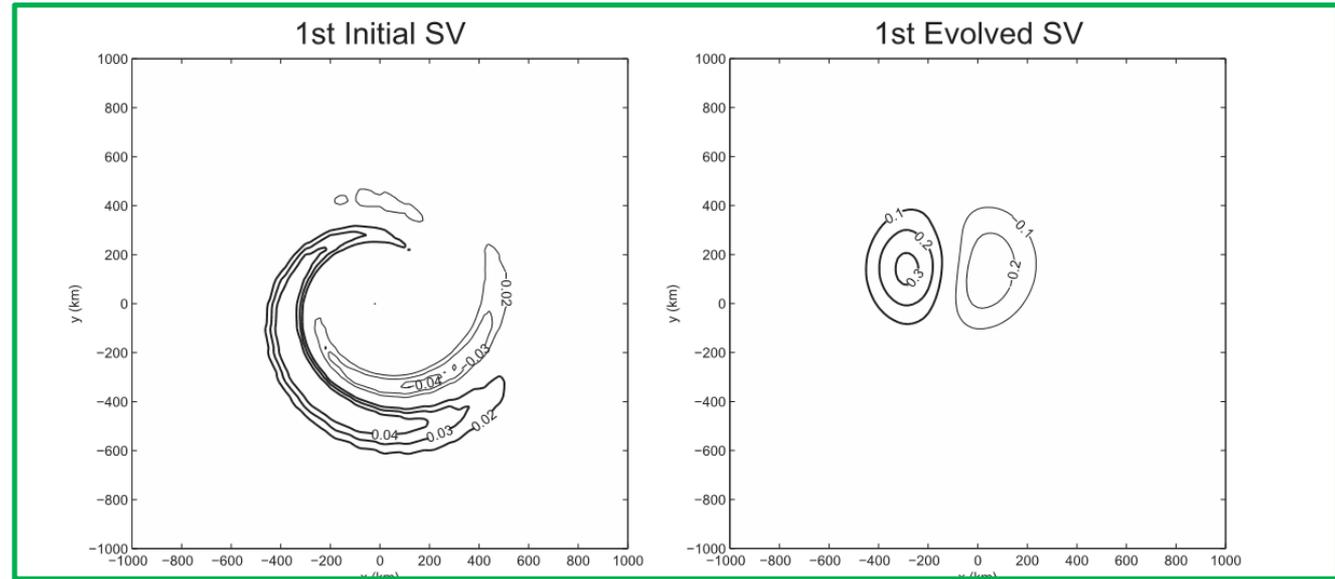
おまけ

成長する渦度擾乱

- β面モデルでは波数1成分が卓越し、台風進路への影響が示唆される。現実的な台風進路の感度解析でも似た構造が。

順圧非発散モデル
(β平面)

(Yamaguchi and Nolan, 2011)



WRFを用いた台風
進路の感度解析

(Ito and Wu, 2013)

