

GFDセミナー

支笏湖休暇村

2017/08/26-27

台風物理学の基礎と その応用としての予測

伊藤耕介（琉球大学）

謝辞：資料作成にあたり、宮本佳明様、筆保弘徳様、中野満寿男様、山口宗彦様、山田広幸様、辻野智紀様にお世話になりました。感謝致します。本発表で示す結果の一部は理化学研究所のスーパーコンピューター「京」を利用して得られたものです。

自己紹介

- 秋田県能代市出身 35歳、妻1人、娘1人、息子1人。
- 人の命を救う職業に就きたいと思っていたが、手先がとてつもなく不器用なので医者になるのは諦める。
- 博士号取得：京都大学理学研究科海洋物理学研究室
(きっかけ⇒宮本君と杉浦さんの講演に触れたこと)
- 学位取得⇒国立台湾大学(2011-)⇒JAMSTEC(2012-)⇒
琉球大学理学部助教(2014-; 数値天気予報研究室開設)
- 主な研究テーマ：数値予報、台風物理学、結合モデル
- 台風物理学(日本で唯一の台風講義?)等を担当
- 先輩の山田広幸先生や学生さんと楽しく研究
- GFD参加歴：2回(高谷さん、篠田さん・鈴木さん)
- GFDセミナーを参考に台風セミナーというイベントを
始めたので、お引き受けするしかないと思った。

京大在学中

台湾

JAMSTEC

琉球大学

台風

台風通過時の
海洋応答(卒論)

暖水渦の台風強度への
影響(博論&2011)

台風進路の感度解析
手法TyPOS (2013)

台風転向点の
10年規模変動
(2015)

台風予報誤差
データベース
(2016)

波しぶきの移流が
促す台風強化
(in revision)

台風状況下の海面
状態推定(博論&2010)

海面状態推定
JNoVAに実装
(2013)

高解像度
大気海洋
結合モデル
(2015)

北西太平洋全域
結合台風予測
(submitted)

気象学 一般

QBO-太陽活動
(修論&2009)

データ同化
システム

NHM-4DVAR.v3
の開発(2014)

Hybrid EnKF-4DVar
システム(2016)

Neighboring
アンサンブル法
(2016)

大気海洋結合
LETKF (2017)

その他

馬券の的中
確率(2010)

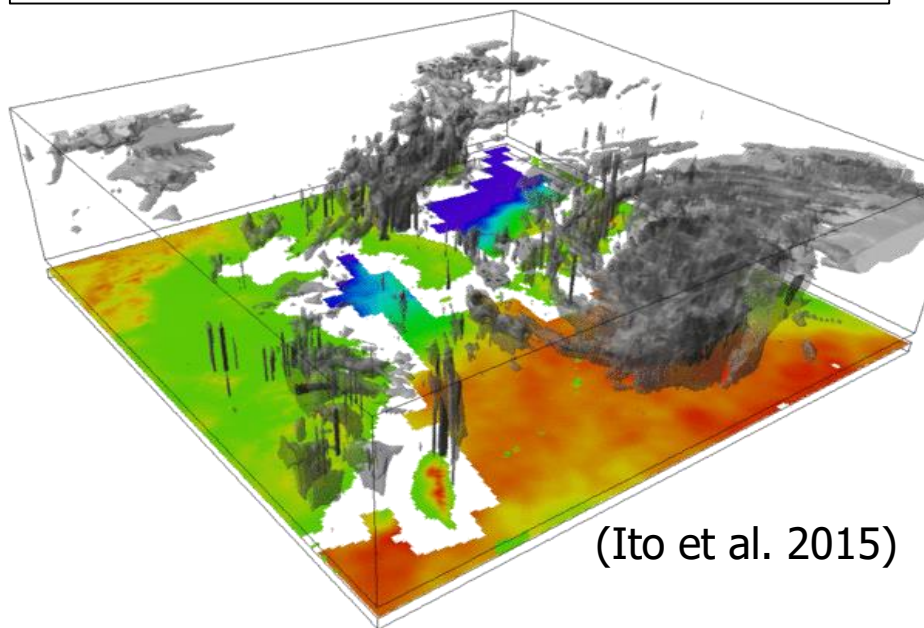
津軽海峡の
潮汐混合(2011)

地震学への
4DVarの適用に
関する基礎研究
(2010, 2013)

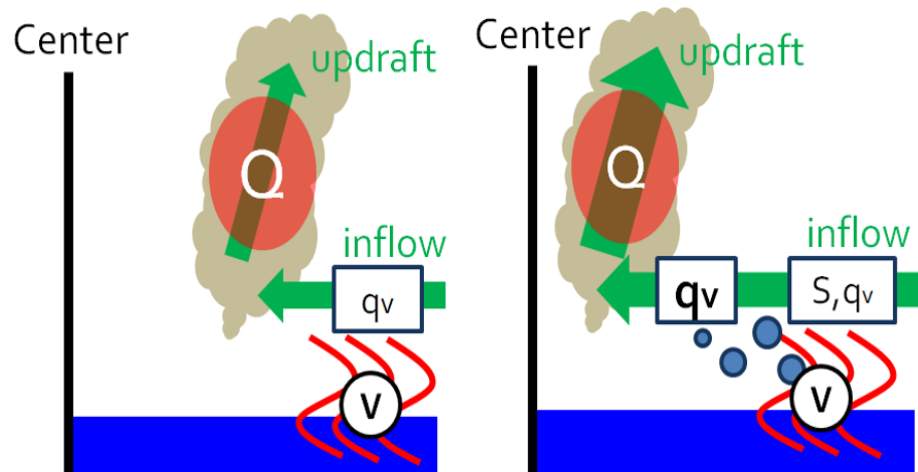
4DVarによる
十勝沖地震後の
余効すべり予測
(2015)

赤字：主著
黒字：共著

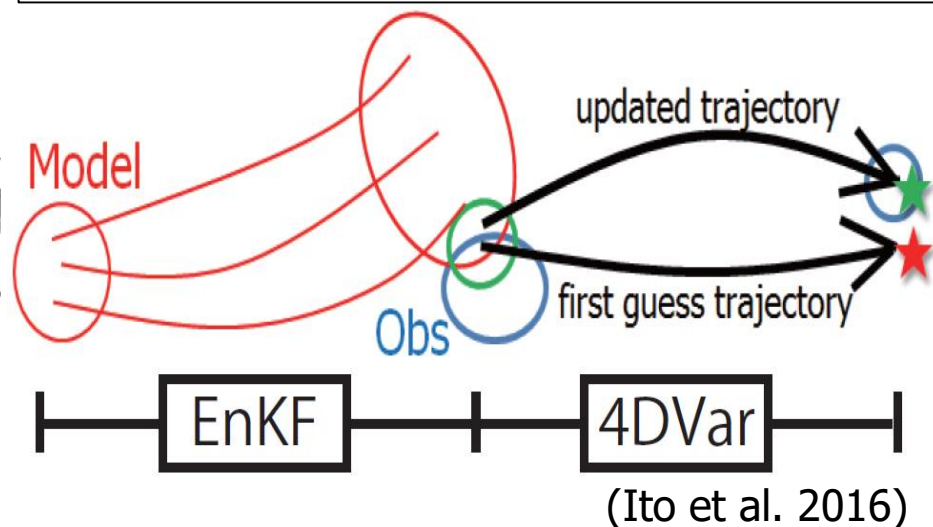
高解像度大気海洋結合モデル



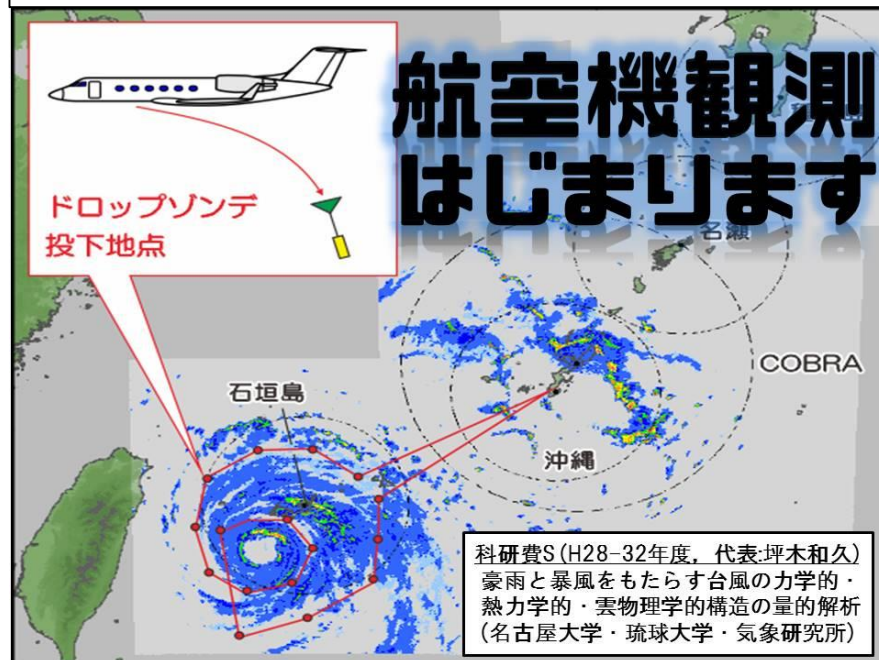
波しぶき移流が促す台風強化



Hybrid EnKF-4DVarシステム



台風航空機観測用の感度解析



基本的な研究ポリシー

- 自分で思いついたことから順に研究をする。やりたいことには際限なくエネルギーを出せるから。
- 社会貢献できると思ったらそれも研究テーマにする。
- 自由な発想を生かすためには深い「納得」が必要。
- 色々な分野の人と積極的に関わりを持ったことで、さまざまな発想・可能性が広がってきた。
- 論文出版は厳しい登山のようなものだが、就職時にはそれが履歴書となり、大いに役立った。
- ここには記せない数限りない失敗もあった。

古き良き京大生(変な人・自由な発想)であり続けたいと心から願っている。同時に、少しでも社会に貢献できることは素直に嬉しい。

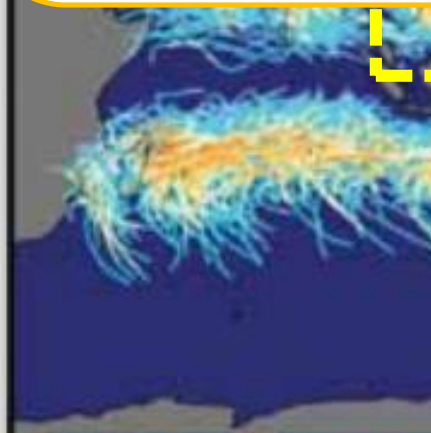
琉球大学気象若手セミナー(無茶修行セミナー)

琉球大学に来て研究紹介してみませんか？

旅費は琉大が負担可能です。

対象：博士課程の学生さん・ポスドク

テーマ：気象学や数値予報に関係すること



山田広幸
(観測)

猛烈な台風



Asaroら 2011)

伊藤耕介
(モデル・同化)

く出現する

全体の流れ

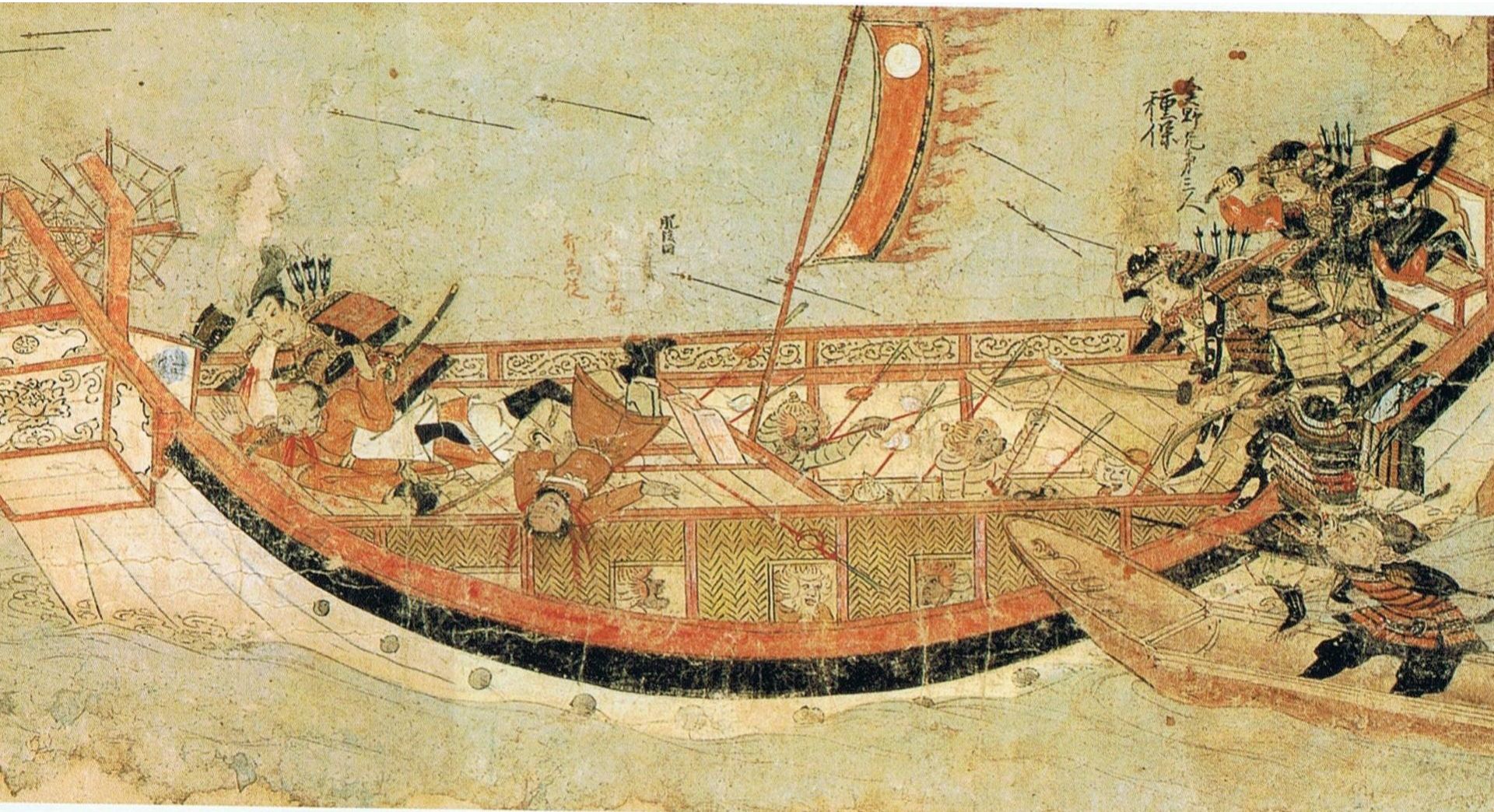
- 自己紹介
- 初日：台風物理学の基礎
 - Part 0 はじめに
 - Part 1 台風ライクな軸対称渦
 - Part 2 WISHEメカニズム
 - Part 3 台風ライクな水平 2 次元渦
- 二日目：台風物理学の応用としての予測
 - Part 4 台風予測の現状
 - Part 5 高解像度大気海洋結合モデルを用いた台風予測
 - Part 6 台風予測に適した感度解析とデータ同化

本セミナーにおける講義の方針

- 前半：「円筒座標系における軸対称な渦」「水平2次元な渦」という2つの2次元世界で台風の基本的な特徴について考察する。
- 後半：台風物理学と数値予報の基礎を踏まえ、台風予測に適した手法について考える。

Part 0 はじめに

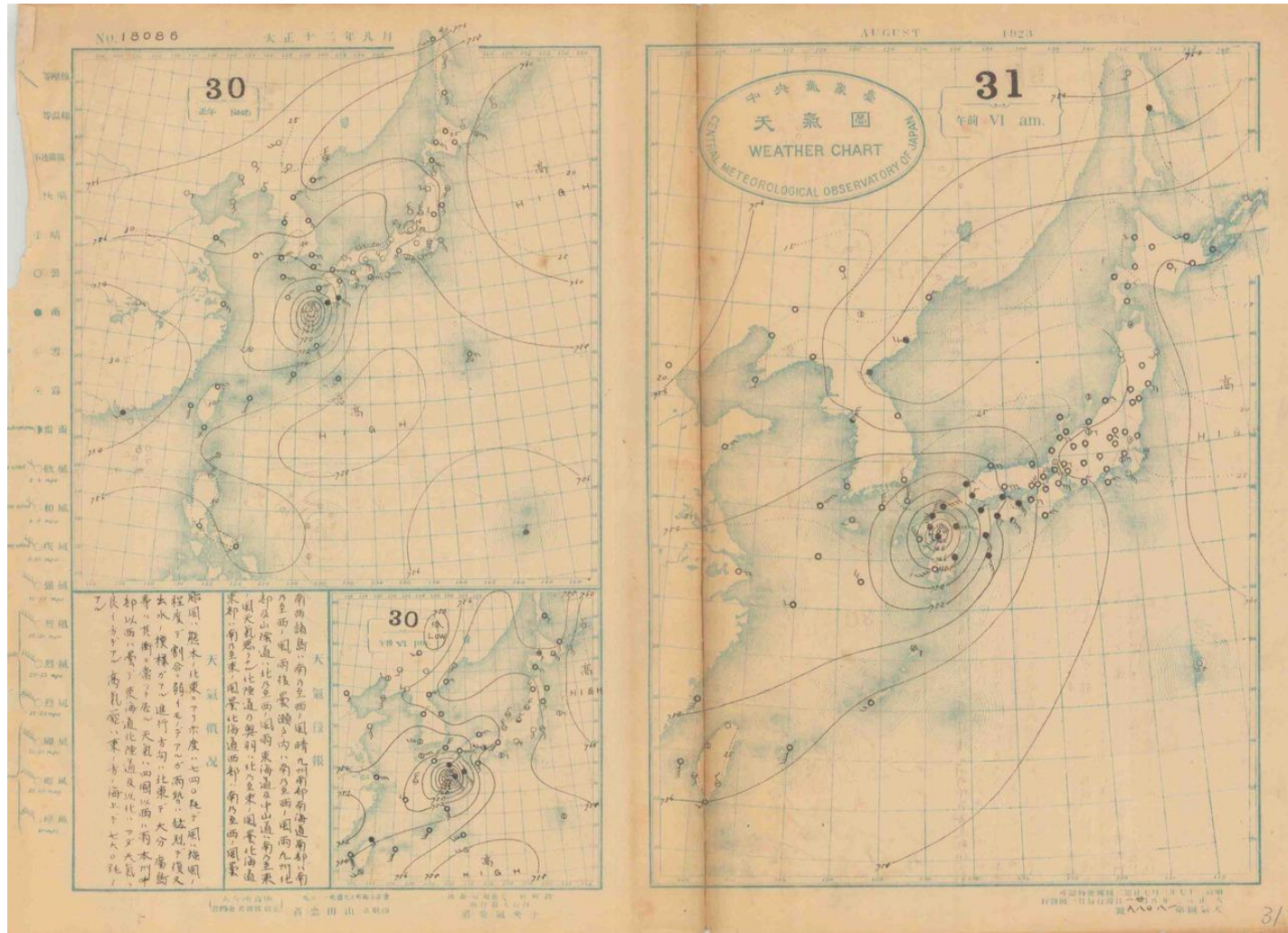
日本×台風＝元寇



(蒙古襲来絵詞 後巻)

1923年8月31日の天気図

- **関東大震災**発生時：南南西の風12.3m/s



(デジタル台風)

最大瞬間風速81.1 m/sを 観測した与那国島 (2015年第21号)



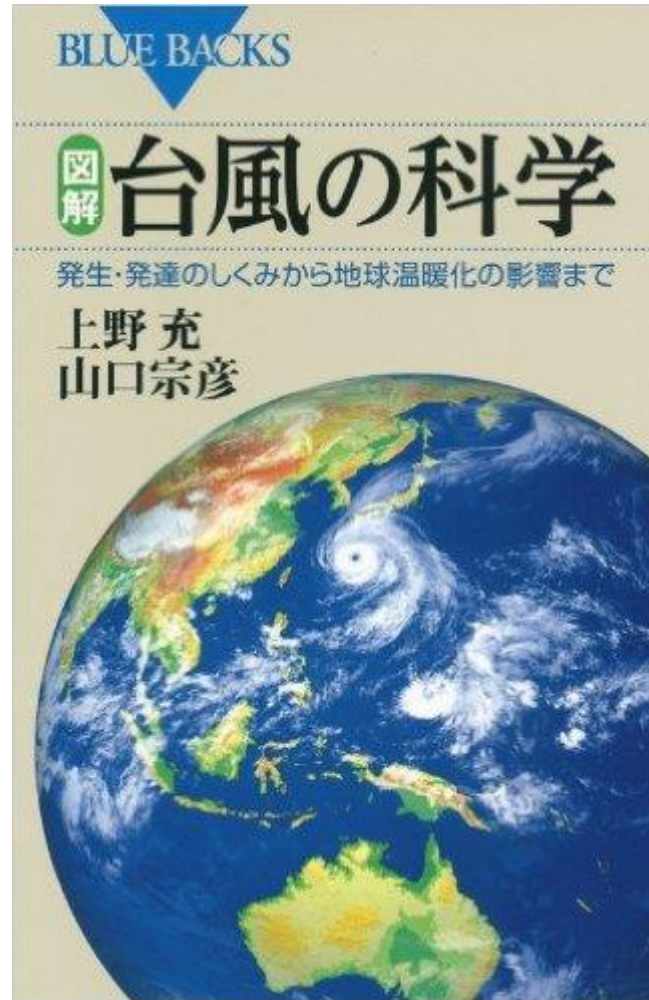
https://www.youtube.com/watch?v=-bXf04__Kj0

台風の特徴

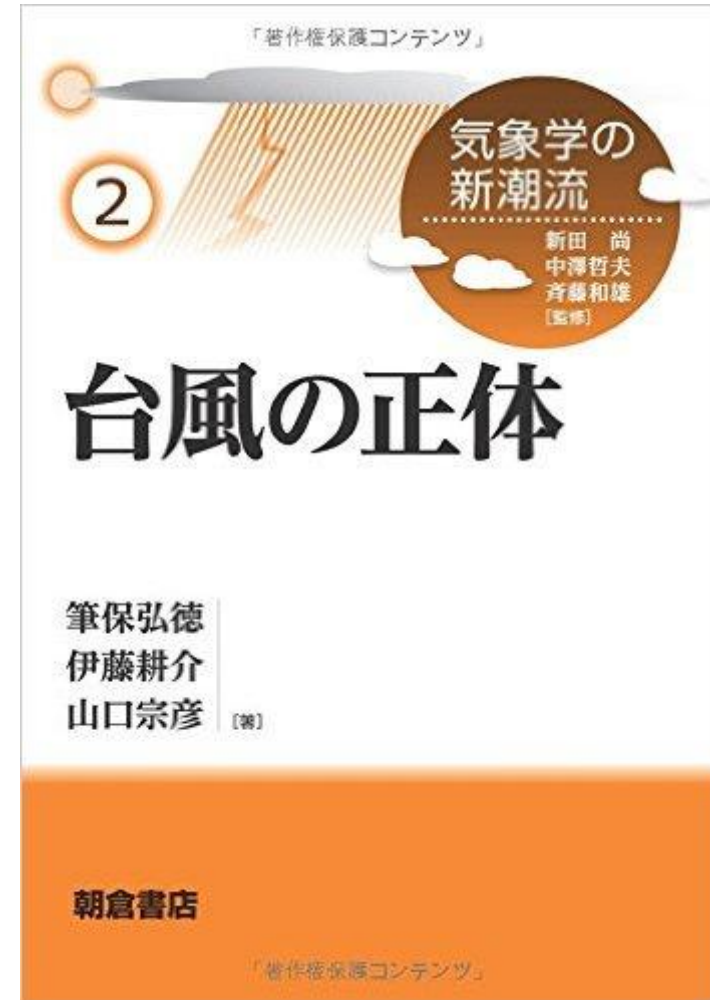
- 伊藤の考え：台風は「**三二気象学**」である
 - 研究テーマのスペクトルがとにかく広い。
進路・強度・発生・降水・構造・サイズ、
力学＋熱力学＋放射、乱流～ENSO、
大気海洋陸面相互作用、
理論・観測・数値実験・予測・防災
 - 地球規模の大気場と同様に、台風の中の構造として
「傾圧性」や「ロスビー波」が存在している。
- 非断熱加熱に駆動され、内部コア領域で力学と熱力学が協調的に役割を果たすシステム
- 傾度風平衡・静水圧平衡の近傍にある
→**物理場の構造や拳動はバランス力学に基づく
力学的な解釈が可能(GFD的に楽しい！)**

台風を学ぶための参考書(入門・基礎編)

→台風のことにについて数式を使わずに理解



「台風の科学」 上野・山口著
講談社, 950円

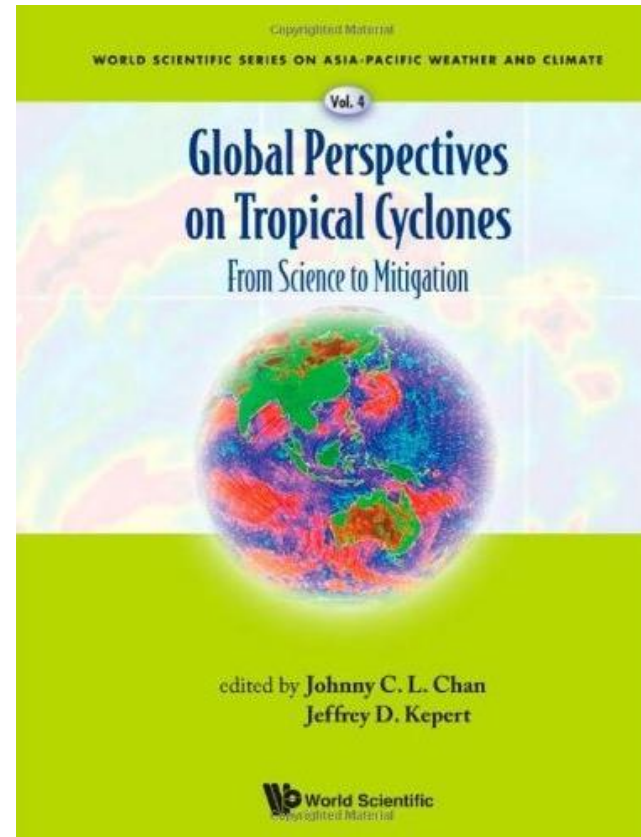


「台風の正体」 筆保・伊藤・山口著
朝倉書店, 3132円

台風を学ぶための参考書（発展編）



「台風研究の最前線」筆保・中澤編
日本気象学会刊



“Global perspectives on Tropical Cyclones”
J.-C. Chan and J. Kepert

・このほか、日本気象学会台風研究連絡会のHPでは、過去の台風セミナー講演資料をアップロードしています

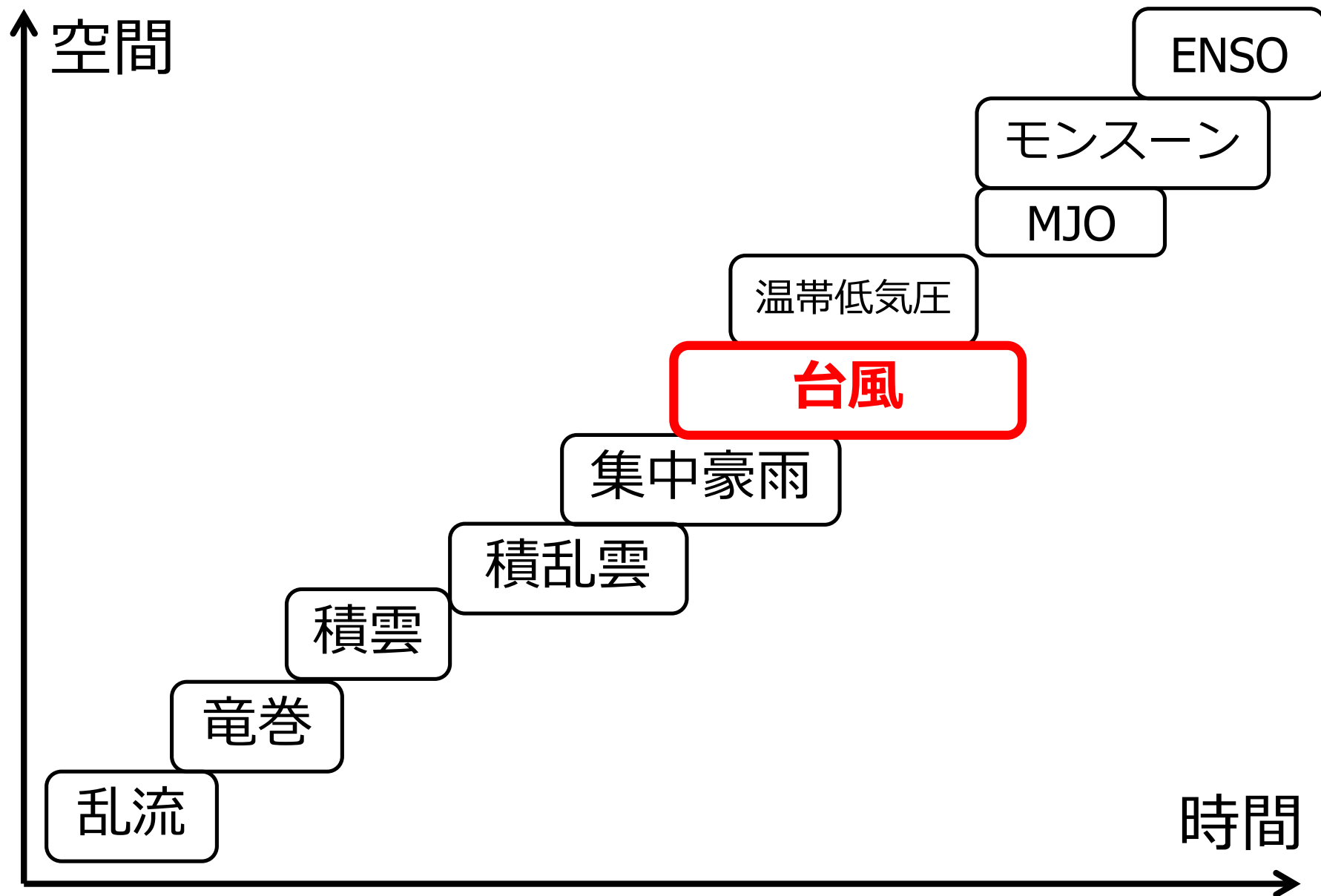
台風定義

- 気象庁の定義では台風は「北西太平洋に存在する熱帯低気圧のうち、低気圧域内の最大風速がおよそ17m/s（34ノット）以上のもの」

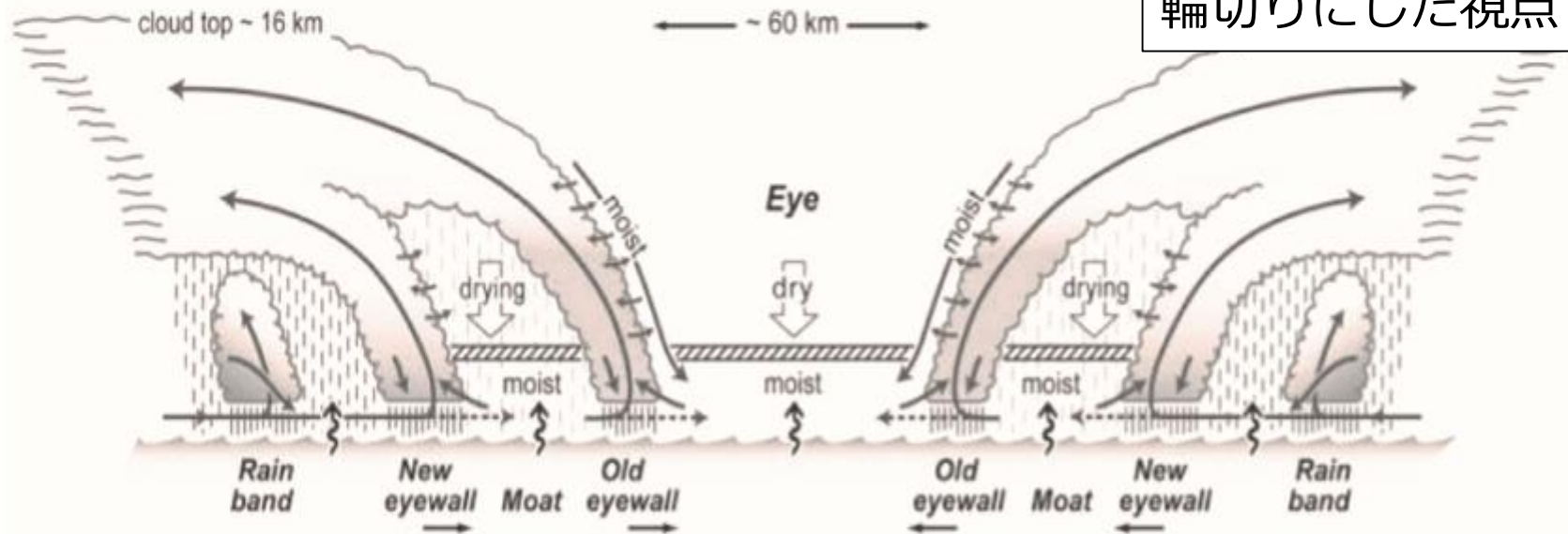
10分平均風速の最大値。
直接観測が難しい台風は、
ドボラック法(赤外画像を
用いた推定法)

- 世界気象機関・気象庁の定義Typhoonは
(10分平均風速の最大値) > およそ32m/s
- 米ハリケーンセンターの定義するHurricaneは
(1分平均風速の最大値) > およそ32m/s

大気現象のスケールと寿命

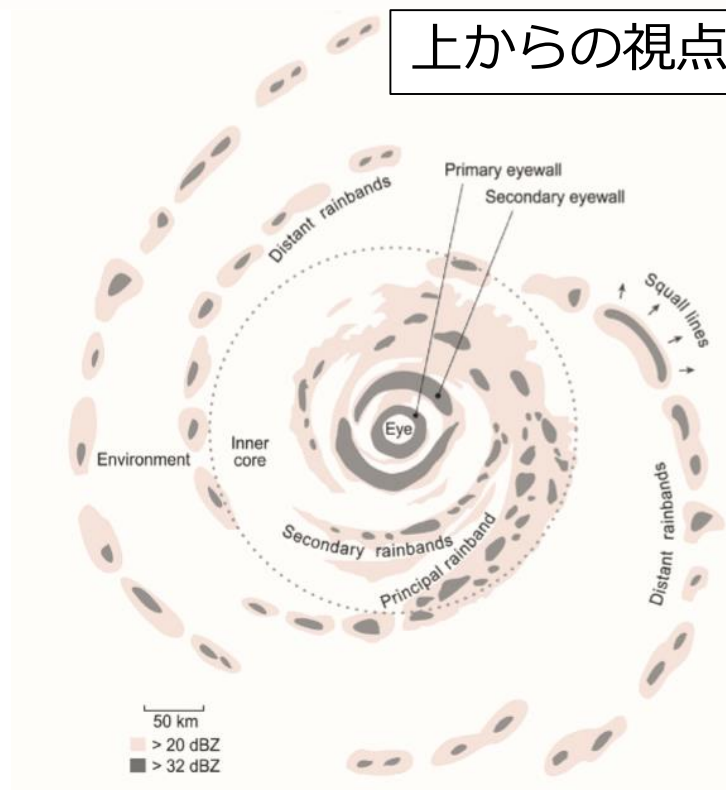


輪切りにした視点



(Houze 2010)

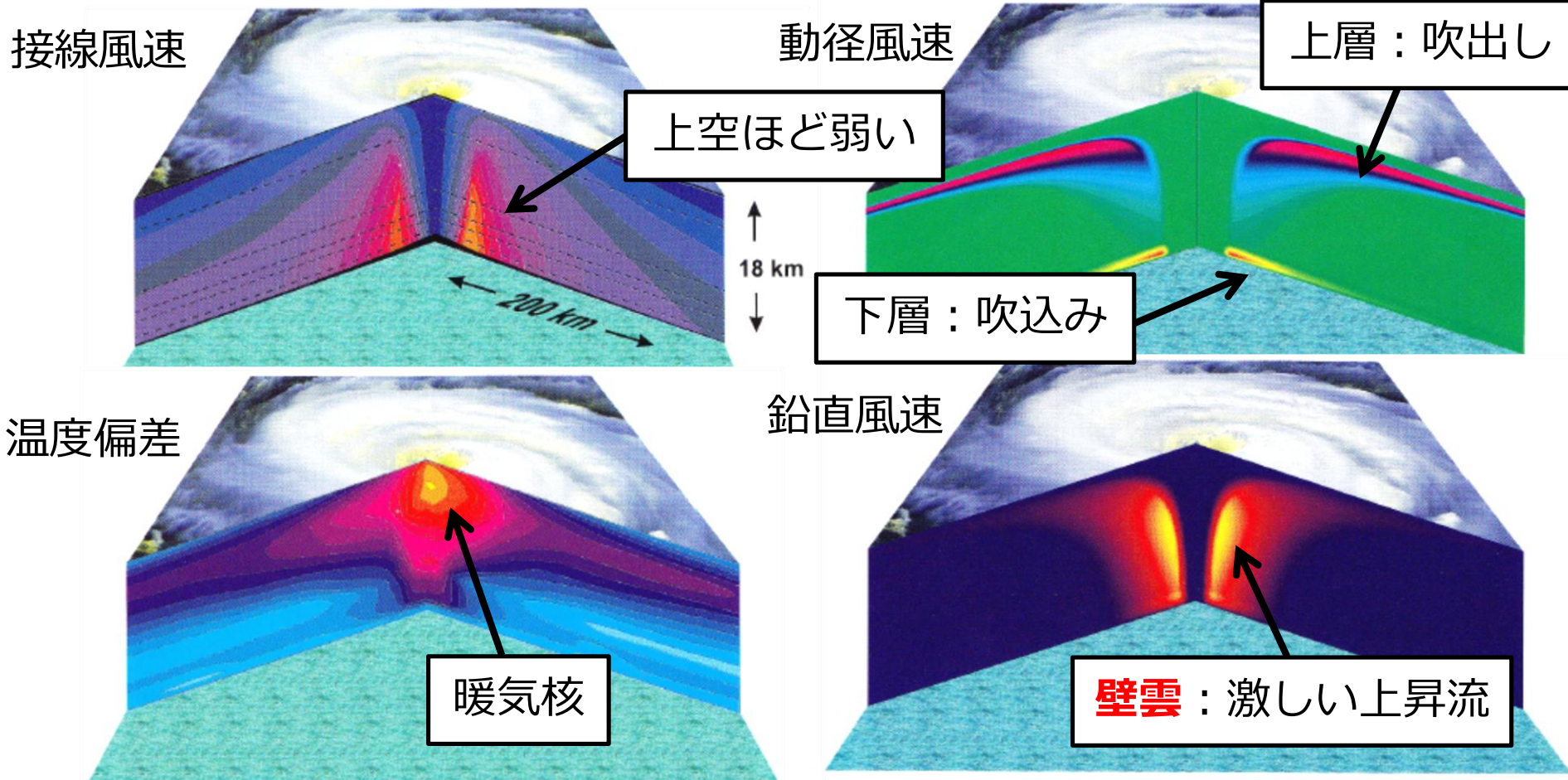
上からの視点



(Houze 2010)

軸対称的な台風の力学的・熱学的構造

Hurricane Fran(1999)の航空機＋衛星観測のコンポジット解析



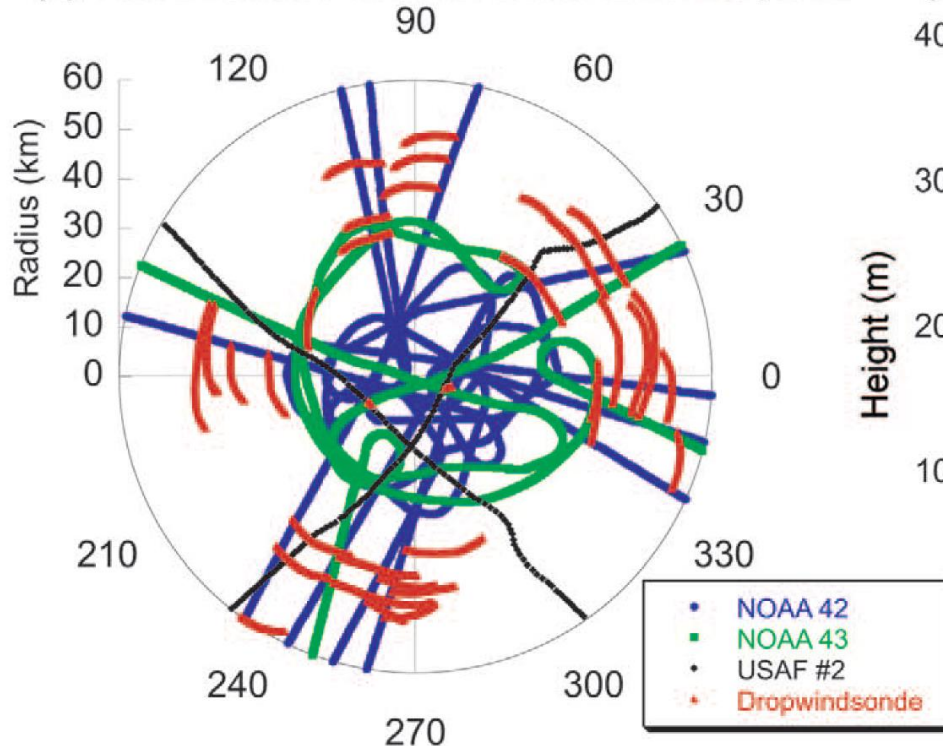
一次循環：接線風速が形成する循環

二次循環：動径風速と鉛直風速が形成する循環
(Emanuel 2005)

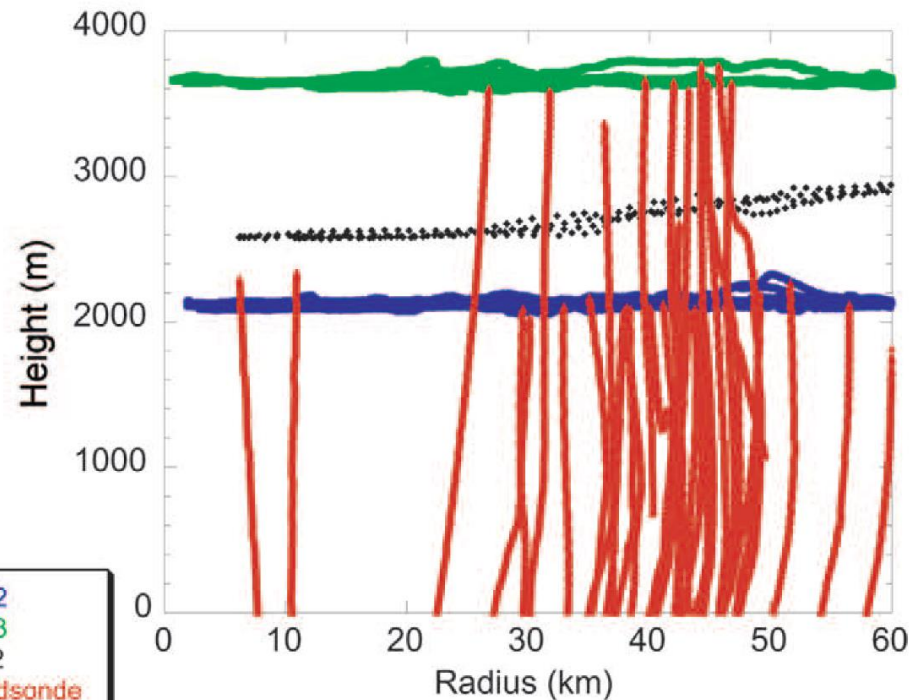
Hurricane Isabel (2003)の中心付近の観測 観測に用いた航空機のパスとドロップゾンデの軌跡

- NOAA P-3を2機 + USAF C-130を1機
- とともにプロペラ機

(a) Storm-relative data distribution in R - θ plane

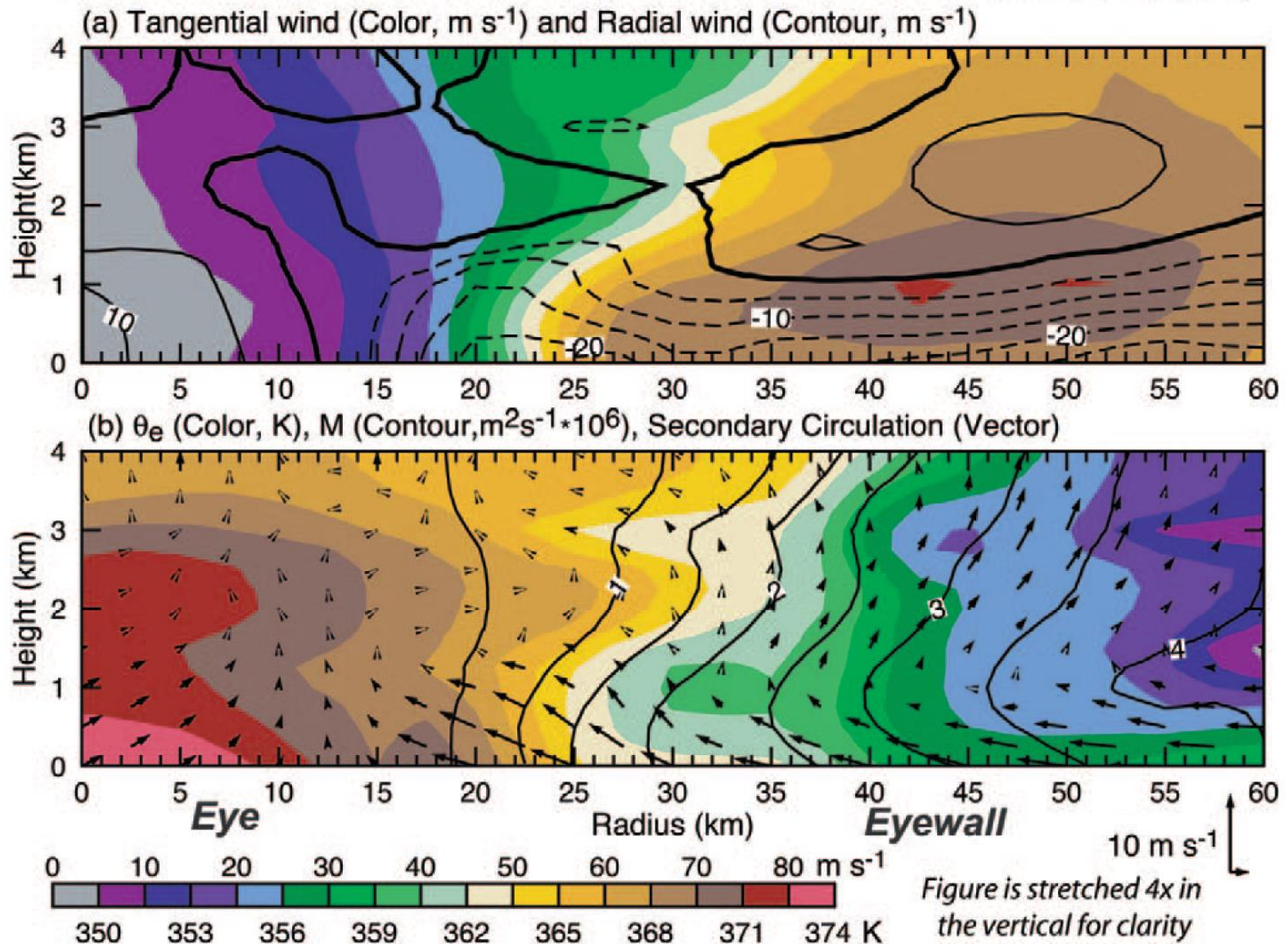


(b) Storm-relative data distribution in R - Z plane



(Montgomery et al., 2006)

Hurricane Isabel (2003)の中心付近の観測 ドロップゾンデとフライトレベル観測のコンポジット



(Montgomery et al., 2006)

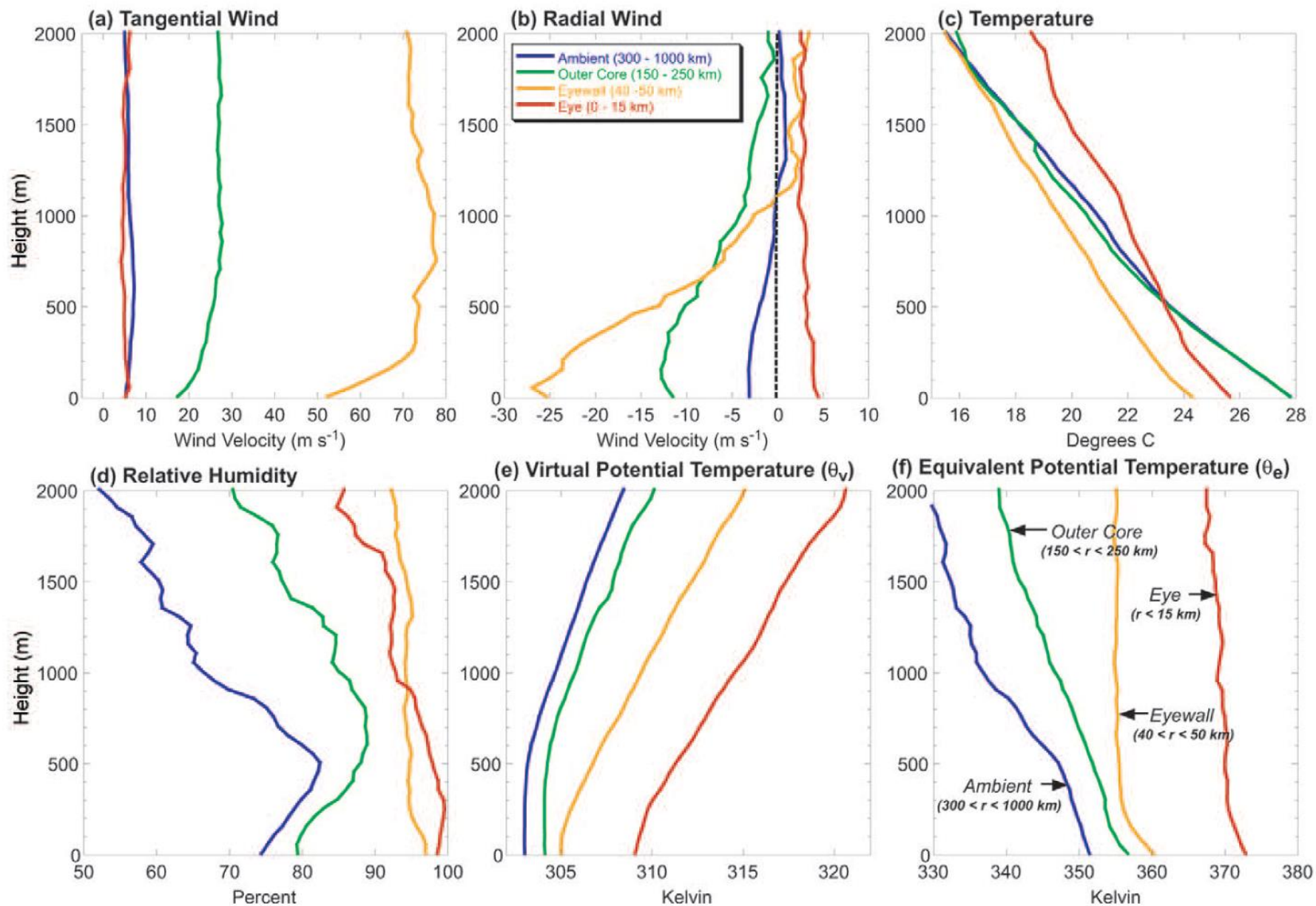


FIG. 4. Low-level (0–2 km) mean soundings from dropwindsonde observations for the eye (0–15-km radius, red), nominal eyewall (40–50-km radius, orange), outer core (~200 km radius, green), and ambient environment (300–1000-km radius, blue) during 1600–2300 UTC 13 Sep. (a) Tangential wind (m s^{-1}), (b) radial wind (m s^{-1} ; inflow/outflow transition indicated by dashed line), (c) temperature ($^{\circ}\text{C}$), (d) RH (%), (e) θ_v (K), and (f) θ_e (K).

Part 1 台風ライクな軸対称渦

1-1 基本場

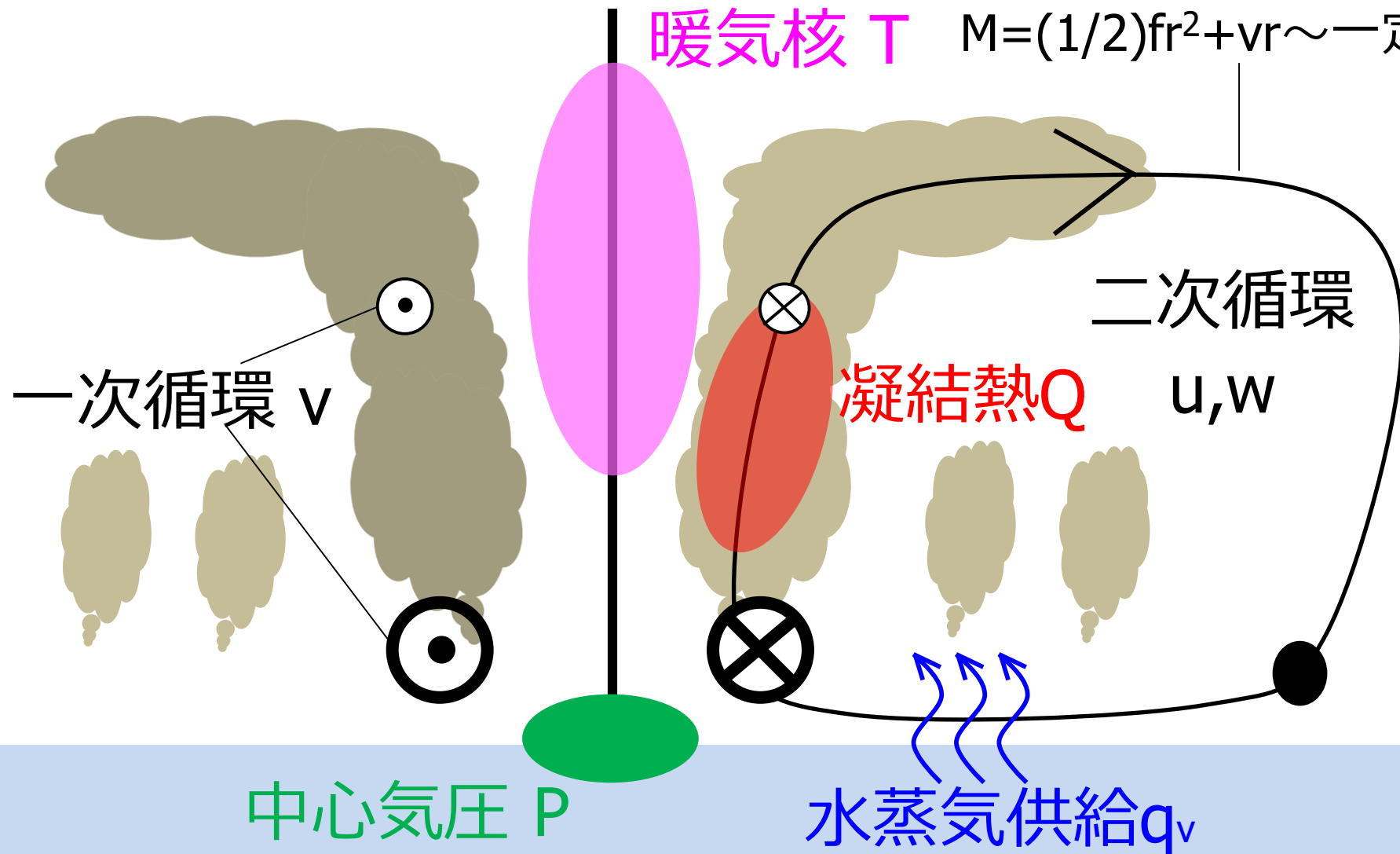
Part 1の目標：台風の軸対称構造を理解

台風の中心

摩擦で減ることを除き
循環に沿って

暖气核 T

$$M = (1/2)fr^2 + vr \sim \text{一定}$$



デカルト座標系における基礎方程式

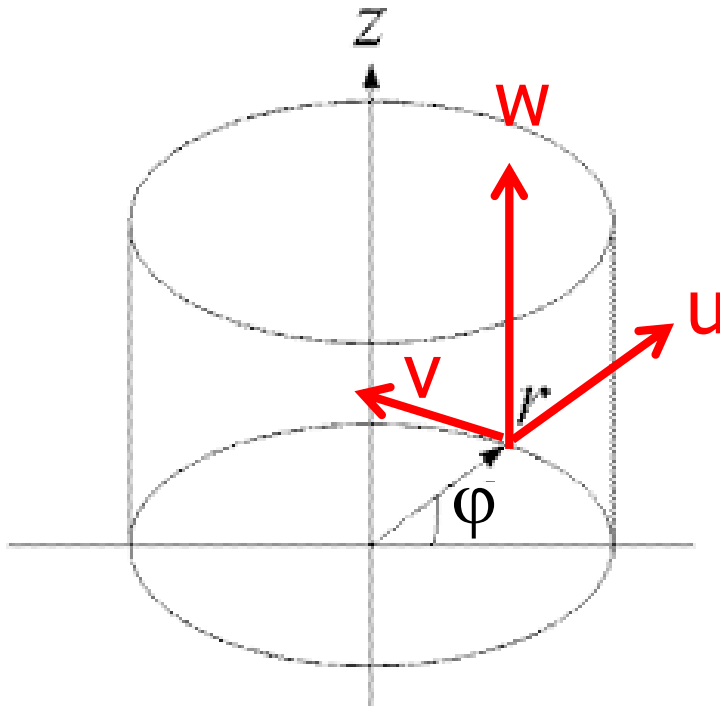
(簡単のため、水蒸気と水が、比熱や密度に及ぼす影響は無視)

- 運動方程式
(風速(v_x, v_y, v_z))
$$\begin{aligned}\frac{Dv_x}{Dt} - fv_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{Dv_y}{Dt} + fv_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z\end{aligned}$$
- 質量保存則
(非弾性近似)
$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$
- 状態方程式 $p = \rho RT$ or $p\alpha = RT$
- 熱力学の第一法則

$$\dot{Q} = C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} \approx \frac{D(C_p T + gz)}{Dt}$$

円筒座標系への座標変換

- r は原点からの距離、 φ は基準となる方向からの角度(方位角)
(ここでは φ は x 軸を基準とし反時計回りに正の方向)
- u, v は、動径方向・接線(方位角)方向の速度成分で**動径速度**
(Dr / Dt ; 外向きが正), **接線速度** ($rD\varphi / Dt$; 反時計回りが正)
と呼ぶ。



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z' \end{aligned}$$

$$v_x = u \cos \varphi - v \sin \varphi$$

$$v_y = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

$$v_z = w$$

鉛直座標については、以後、 z と z' を同じとみなす。

円筒座標系への座標変換

- 位置ベクトルと速度ベクトルの変換

$$x = r \cos \varphi$$

$$v_x = u \cos \varphi - v \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$v_y = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

$$z = z'$$

$$v_z = w$$

- 関数 $h = h(x, y, z) = h(r, \varphi, z')$ の偏微分

偏微分の連鎖律: x に関する偏微分

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \quad (y, z \text{ に関する偏微分も同様})$$

以上よりデカルト座標系 (x, y, z) から円筒座標系 (r, φ, z')

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z'}$$

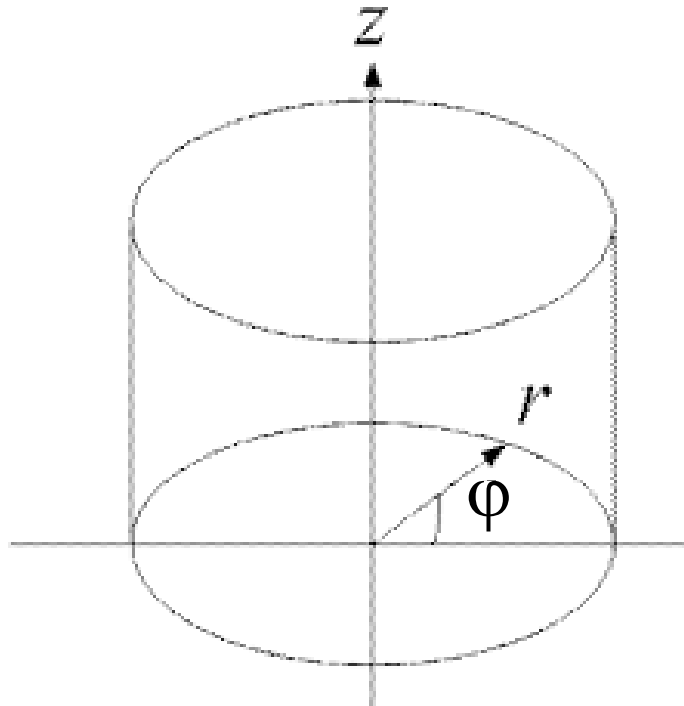
円筒座標系への座標変換

・ 任意の関数 $h=h(x,y,z,t)=h(r,\varphi,z,t)$ のラグランジュ微分について

$$\begin{aligned}\frac{Dh}{Dt} &= \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} + v_z \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= \frac{\partial h}{\partial t} + (u \cos \varphi - v \sin \varphi) \left(\cos \varphi \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad + (u \sin \varphi + v \cos \varphi) \left(\sin \varphi \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) + w \frac{\partial h}{\partial z} \\ &= \boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + w \frac{\partial h}{\partial z}}\end{aligned}$$

軸対称の仮定

- 軸対称性は数学的に表すと $\partial/\partial\varphi=0$
- これ以降、台風を中心から鉛直に伸びる軸をz軸とし、台風中心で高度 $z=0$ の地点を原点とする。



$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_{\varphi} \xrightarrow{\text{軸対称性の仮定}} \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = F_{\varphi}$$

基礎方程式系（円筒座標）

- 運動方程式
(風速 (u, v, w))

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu &= -\cancel{\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi}} + F_\phi \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \end{aligned}$$

軸対称の仮定
- 質量保存則
(非弾性近似)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u)}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \phi}} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

軸対称の仮定
- 状態方程式 $p = \rho R T$ or $p \alpha = R T$
- 熱力学の第一法則

$$\dot{Q} = C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt}$$

基礎方程式系（円筒座標；軸対称）

- 運動方程式
(風速 (u, v, w))
$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu &= F_\phi \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z\end{aligned}$$
- 質量保存則
(非弾性近似)
$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$
- 状態方程式 $p = \rho R T$
- 熱力学の第一法則
$$\frac{\dot{Q}}{C_p T} = \frac{D \log \theta}{Dt}$$

(参考) ラグランジュ微分も $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z}$ と単純化される。

円筒座標系での相対渦度と水平発散

- 相対渦度の鉛直成分と水平発散はデカルト座標系で

$$\zeta = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \phi = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

と表される。ここで、

$$v_x = u \cos \varphi - v \sin \varphi$$

$$v_y = u \sin \varphi + v \cos \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

を代入すると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial(vr)}{\partial r} - \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}} \\ \phi = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}} \end{array} \right.$$

軸対称を
仮定する

相対渦度の鉛直成分

$$\zeta = \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial(vr)}{r \partial r}$$

$$\phi = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial(ur)}{r \partial r}$$

水平発散

平衡狀態

静力学平衡

- 台風の内部コアを考えるうえでも静力学平衡は基本場の精度のよい近似となる

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

$$u \approx 10\text{m/s}, w \approx 5\text{m/s}, \delta w \approx 10\text{m/s}, \delta z = 10\text{km}, \delta r = 20\text{km}$$

$$\rightarrow u \frac{\partial w}{\partial r} \approx w \frac{\partial w}{\partial z} < 0.01 \ll g = 9.8 \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

- 静力学平衡の式

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g \quad \xrightarrow[p(r,z) = p_0(z) + \delta p(r,z) \text{ などのように基準状態を分離}]{\quad} \quad \frac{\partial \delta p}{\partial z} = -\frac{\delta \theta}{\theta_0} g$$

傾度風平衡

- 動径方向の運動方程式は以下の通りである。

$$\underbrace{\frac{Du}{Dt}}_A - \underbrace{\frac{v^2}{r}}_B - \underbrace{fv}_C = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}}_D + \underbrace{F_r}_E$$

- B(遠心力), C(コリオリ力), D(気圧傾度力)のつり合いが成り立つ状態のことを傾度風平衡という。
- 強い台風の内部コアを考える
 $\delta u \sim 5\text{m/s}$, $\delta t \sim 1000\text{s}$, $v \sim 60\text{m/s}$, $r \sim 20\text{km}$, $f \sim 5 \times 10^{-5}/\text{s}$
→ $B/C \sim 60.0$, $A/B \sim 0.025$
 - 地衡風平衡($B/C = v/fr = Ro \ll 1$)は成り立たない。
 - 傾度風平衡は自由大気でよい近似となっている。

静力学平衡＋傾度風平衡⇒温度-風関係

- 静力学平衡と傾度風平衡及び動径風速が0の状態を基本場として $\bar{\quad}$ で表す。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g \quad \frac{\bar{v}^2}{r} + f\bar{v} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \quad \bar{u} = 0$$

- これと状態方程式を組み合わせると温度-風関係の式が現れる（導出は省略）。

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_r = \frac{g}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_p$$

- 北半球における台風の場合
中心に近づくほど温位が上がる(暖気核)
⇒上空にいくほど接線風速が弱い

準保存量

(絶対角運動量と飽和相当温位)

絶対角運動量の保存則

接線方向の運動方程式 $\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = F_\varphi$

$u \equiv Dr / Dt$ を代入し両辺に r を掛ける→

$$r \frac{Dv}{Dt} + v \frac{Dr}{Dt} + fr \frac{Dr}{Dt} = rF_\varphi$$

$$\frac{D\left(rv + \left(1/2\right) fr^2\right)}{Dt} = r \frac{Dv}{Dt} + v \frac{Dr}{Dt} + fr \frac{Dr}{Dt} \rightarrow$$

本来、角運動量はベクトル量だが、台風業界では鉛直成分だけを指してこう呼ぶ。

絶対角運動量M

$$\frac{D\left(rv + \left(1/2\right) fr^2\right)}{Dt} = rF_\varphi$$

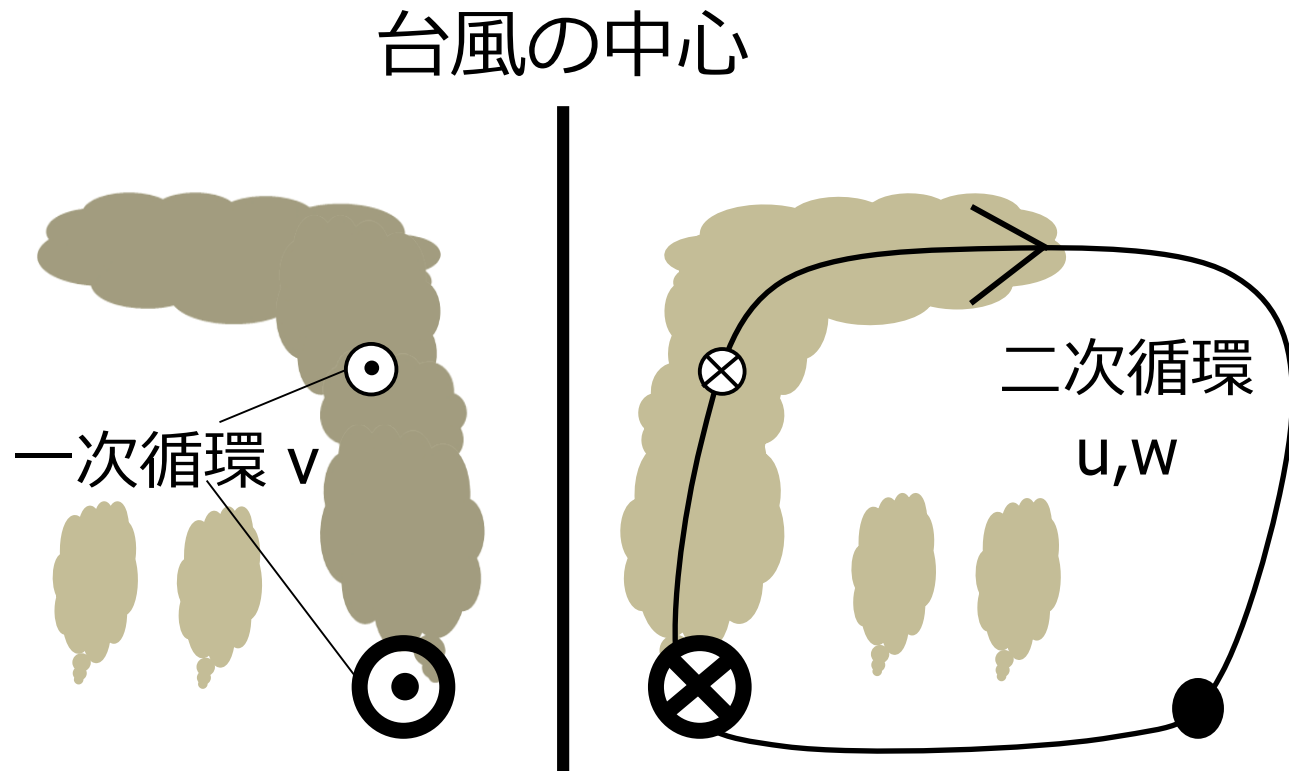
$$\frac{D\left(rv + \left(1/2\right) fr^2\right)}{Dt} = rF_{\varphi} \text{の解釈}$$

- 軸対称系で、摩擦力や粘性などが接線方向に働かないとき($F_{\varphi}=0$)、**絶対角運動量 $M=rv+(1/2)fr^2$** が空気塊に沿って保存。
- 絶対角運動量をなす2つの項は、それぞれ以下のように解釈できる
 - $(1/2)fr^2$: 回転系であることから生じる成分
 - rv : 系に相対的な回転運動に伴う成分
- 講演後の訂正：元々、回転系で定式化しているので、慣性系の立場で理解を試みるべきでは無かったです。スライドも直しました。

台風への応用例

- コリオリパラメータを $f=5.0 \times 10^{-5}$ (北緯約20度に相当)とし、 $r=300$ kmにあった接線風速ゼロの空気塊が摩擦の影響なく、 $r=50$ kmに到達すると、接線風速はいくらになるか？

$$M = 2.5 \times 10^{-5} \times (3.0 \times 10^5)^2 = v \times 5.0 \times 10^4 + 2.5 \times 10^{-5} \times (5.0 \times 10^4)^2$$
$$\rightarrow v = 43.75 \text{ m/s}$$



台風の発生・経路分布

(D'Asaro et al., 2011)

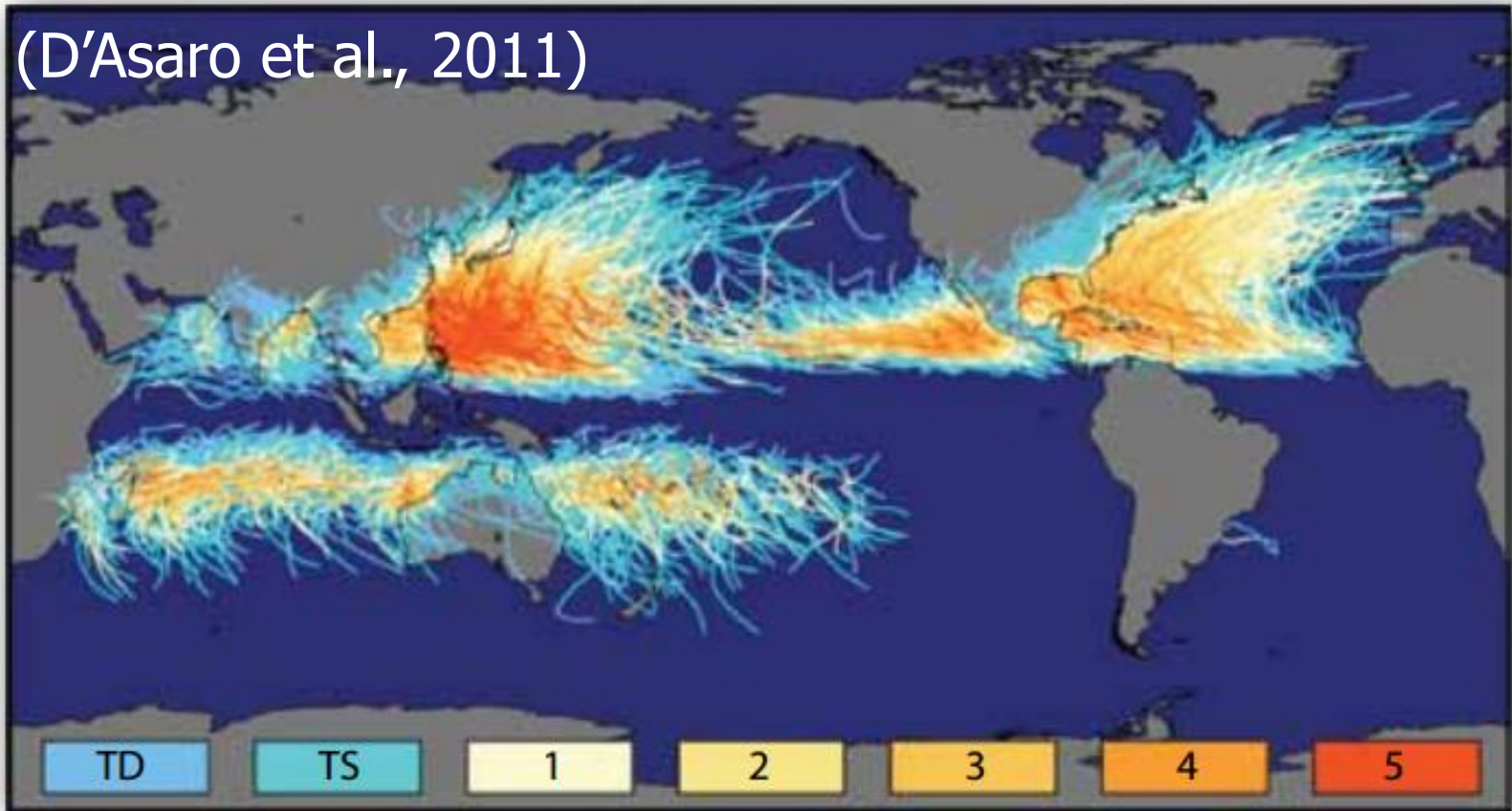


Figure 1. Worldwide tropical cyclone tracks through 2006 from the National Hurricane Center and the Joint Typhoon Warning Center, spanning nearly 150 years. Each track is colored by storm intensity using the Saffir-Simpson storm categories (Tropical Depression, Tropical Storm, and Tropical Cyclone categories 1 [wind $33\text{--}42\text{ m s}^{-1}$] to 5 [wind $> 70\text{ m s}^{-1}$]). The tracks show that the regions of most frequent and intense storms are in the western North Pacific. *Image courtesy of NASA Earth Observatory*

湿潤気体になると何が複雑か？

- 水蒸気と液体の水を考えるだけでも、乾燥気体とは以下のような違いが出てくる。
 - 比熱が変わる
 - 密度が変わる
 - 仕事を考えるうえで水蒸気圧を考慮する必要がある
 - 相変化に伴って凝結熱や蒸発熱が生じる
 - 凝結が起こった際に、それがそのまま留まる(雲を想定)か、液体は抜けていく(対流性降水を想定)かを決める必要がある。

いくつかの単純化

- C_p は定圧比熱であり、温位の定義によっては水蒸気量にも依存するが、ここではその影響を無視する。

$$(1 + q_v)Q = (C_{pd} + q_v C_{pw}) \frac{DT}{Dt}$$
$$(1 + q_v)Q = (C_{vd} + q_v C_{vw}) \frac{DT}{Dt}$$

- 基準面まで乾燥断熱的に戻したときの温度が温位であるから、温位も厳密に言えば水蒸気量に依存するが、これも無視することになる。
- 単位質量当たりの凝結熱は一定であるとする。
- 氷物質は無視する。
- 単位質量当たりの凝結熱 L は一定とする。
- ざっくりいうと、水物質が増えたことに伴う影響は、相変化に伴って熱が生じる部分だけだとして以下の話を進める。

飽和相当温位の導出

(1kgあたりの)

非断熱加熱率

$$\boxed{\dot{Q}} = C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} = C_v \frac{DT}{Dt} + p \frac{D\alpha}{Dt} = C_p \frac{DT}{Dt} - \alpha \frac{Dp}{Dt}$$

- 飽和した空気塊が上昇し、運動に沿って凝結が起こるとする（凝結以外の非断熱加熱はないとする）

$$\dot{Q} = -L \frac{D \boxed{q_v^*}}{Dt} \quad \text{飽和水蒸気混合比}$$

$$C_p dT + L dq_v^* - \alpha dp = 0$$

温度変化項は

$$C_p T \frac{D \log \theta}{Dt} + L \frac{D q_v^*}{Dt} = 0 \rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\log \theta + \frac{L q_v^*}{C_p T} \right) = 0$$

飽和相当温位

$$\rightarrow \boxed{\theta_e^* = \theta \exp \left(\frac{L q_v^*}{C_p T} \right) = \text{const.}}$$

飽和相当温位について

- 飽和相当温位は、凝結が起きているパーセルに沿って、水蒸気供給や凝結以外の熱のやり取りがなければ、物質的に保存する。
- 逆に言うと、放射過程などの影響がある場合、飽和相当温位は変化する。

- 乾燥比エントロピー s_d

$$\frac{\dot{Q}}{T} = C_p \frac{D \log \theta}{Dt} = \frac{Ds_d}{Dt} \rightarrow s_d = C_p \log \theta$$

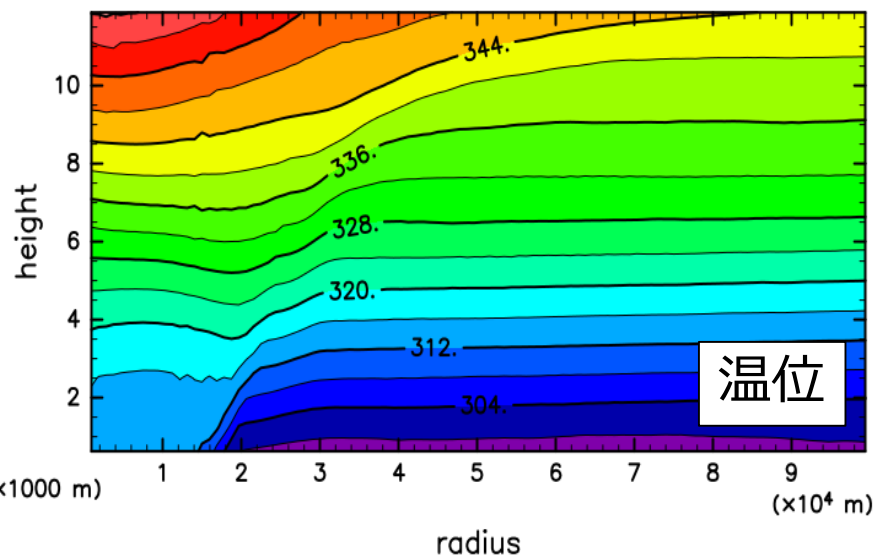
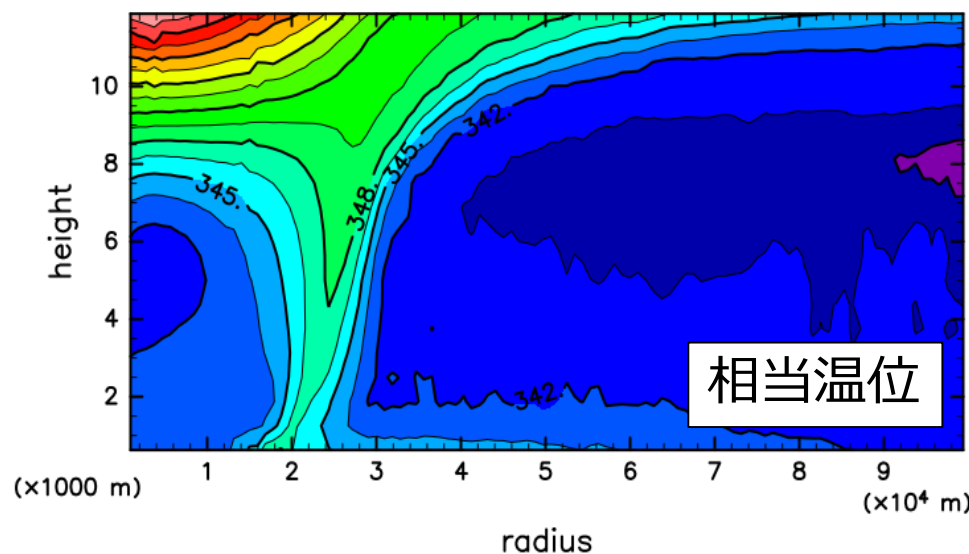
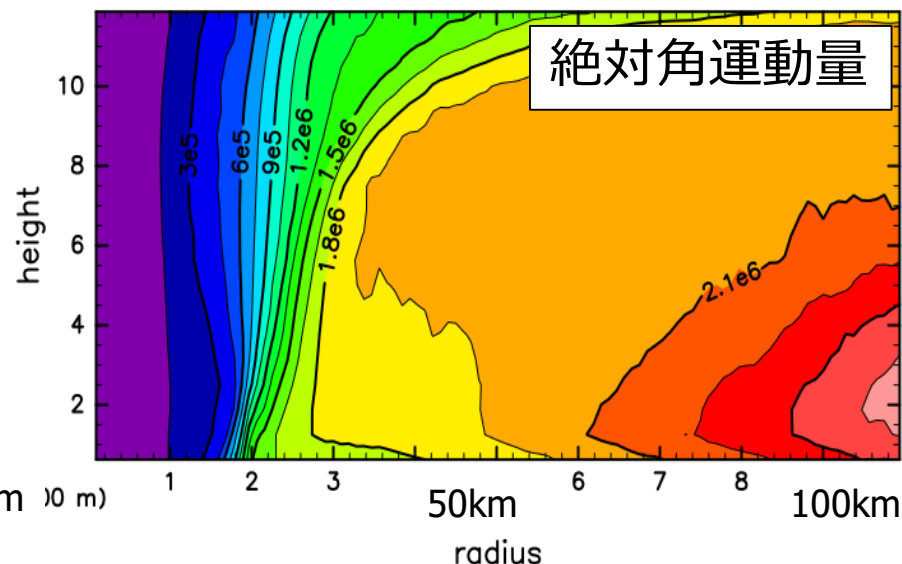
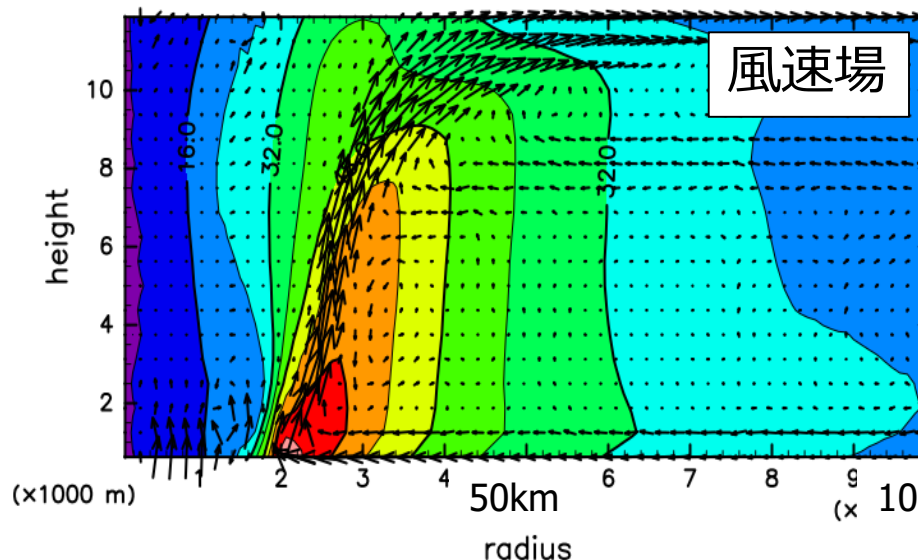
- 凝結を除いた非断熱加熱により変化ように定義されるエントロピーを飽和湿潤比エントロピーと呼ぶ。

$$\frac{\dot{Q}'}{T} = \frac{\dot{Q}}{T} - \frac{L}{T} \frac{Dq_v^*}{Dt} = C_p \frac{D \log \theta_e^*}{Dt} = \frac{Ds_m^*}{Dt} \rightarrow s_m^* = C_p \log \theta_e^*$$

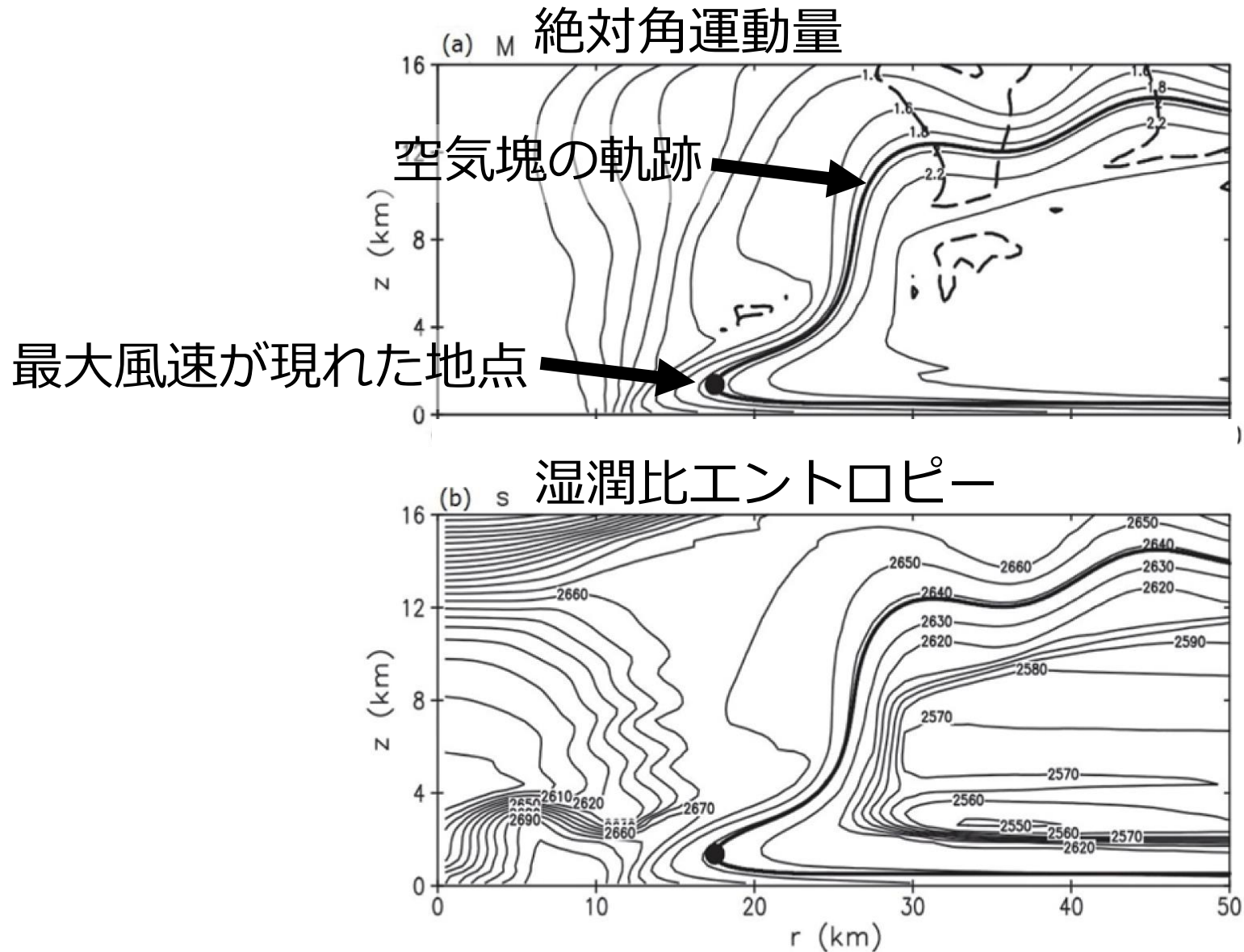
- 飽和湿潤比エントロピーは飽和相当温位と等価

非静力学軸対称モデルによる準定常状態の台風の構造

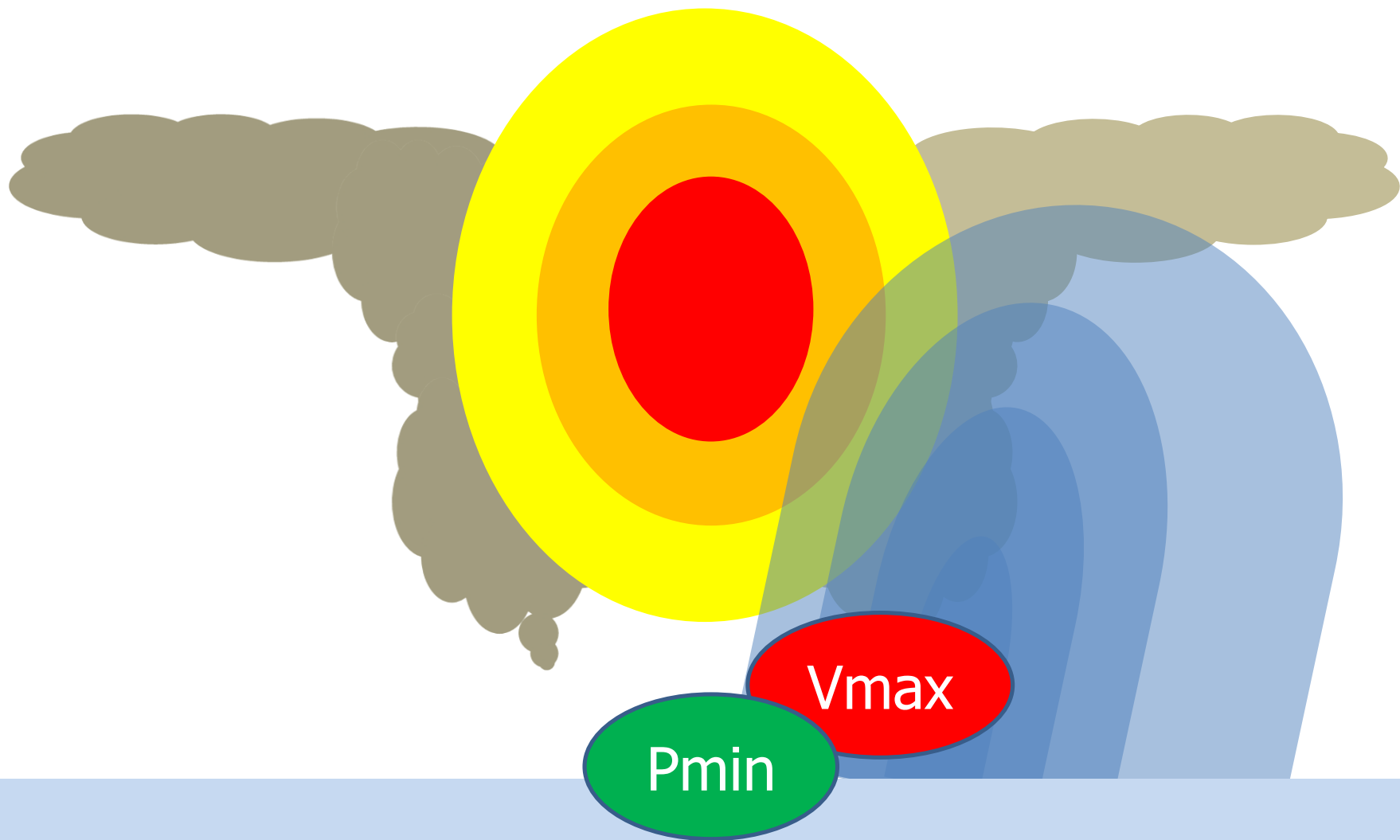
$\Delta r=937.3\text{m}$, $\Delta z=625\text{m}$, 準定常状態



軸対称台風モデルを用いた理想化実験



ここまでのまとめ：基本場の関係



まとめ：台風ライクな軸対称渦の基本場

- 静水圧平衡と傾度風平衡が近似的な平衡状態として成り立っている。
- 静水圧平衡：上空が暖かければ下層ほど気圧低い
- 傾度風平衡：海面気圧が低ければ強い接線風速
- 温度-風関係としては、
「上空に行くほど接線風が弱くなる」と
「中心に近づくほど温度が上がる(暖気核)」
ことに整合的である。
- 成熟期の台風の壁雲に沿った準保存量としては
 - 絶対角運動量
 - 飽和相当温位
(及びそれと等価な飽和湿潤比エントロピー)

摂動と不安定

基礎方程式系（円筒座標系；軸対称を仮定）

傾度風平衡

- 運動方程式
(風速 (u, v, w))

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = F_\phi$$

⇒変形して絶対角運動量保存則

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z$$

静水圧平衡

- 質量保存則

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho ru)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

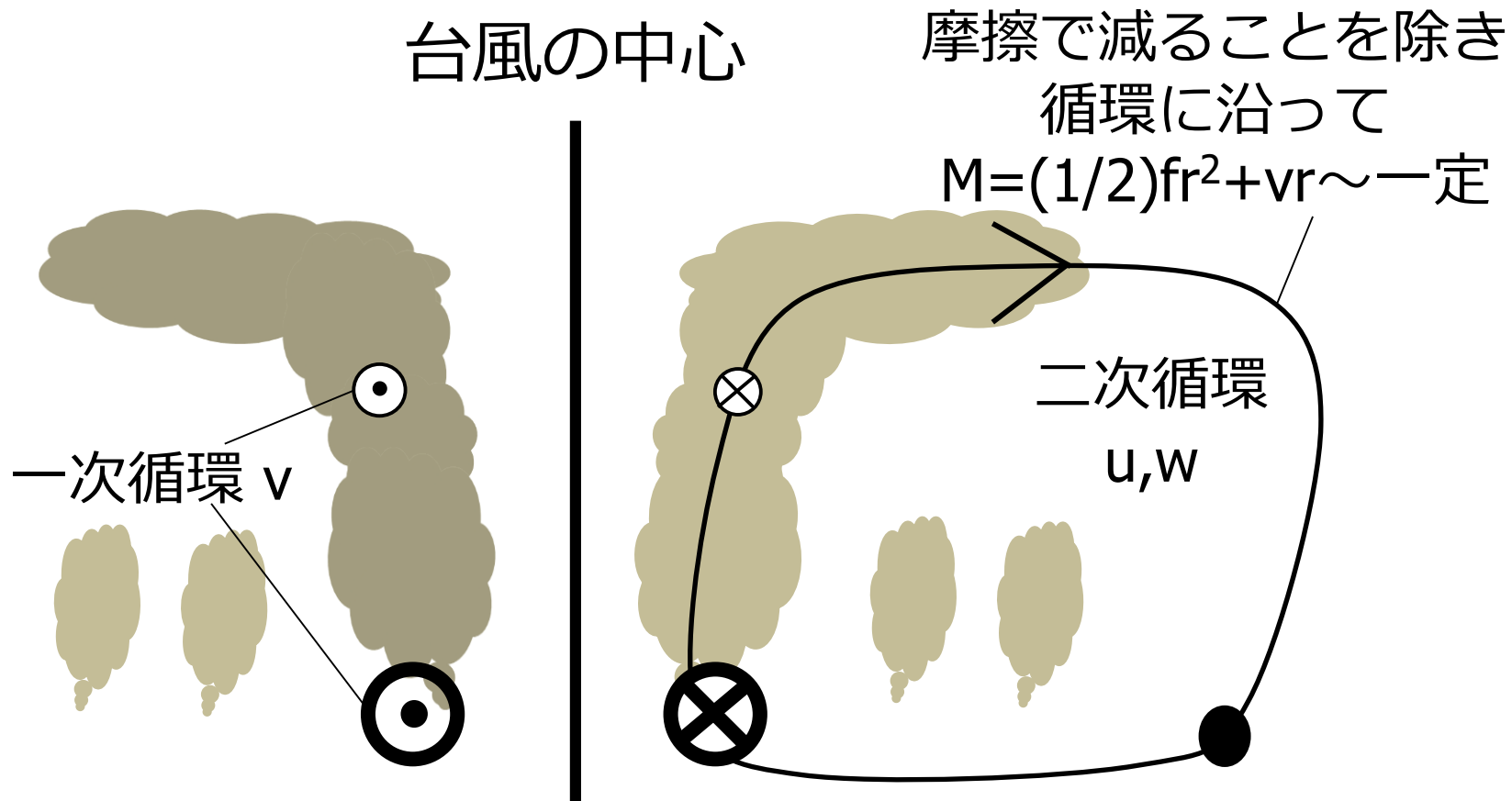
- 状態方程式 $p = \rho RT$

- 熱力学の第一法則 $\frac{\dot{Q}}{C_p T} = \frac{D \log \theta}{Dt}$

(参考) ラグランジュ微分も $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial r} + w \frac{\partial f}{\partial z}$ と単純化される

二次循環の重要性

- 絶対角運動量が二次循環によって外側から輸送されてくることが台風にとって本質的。
- 平衡状態だけでは二次循環を議論できない。

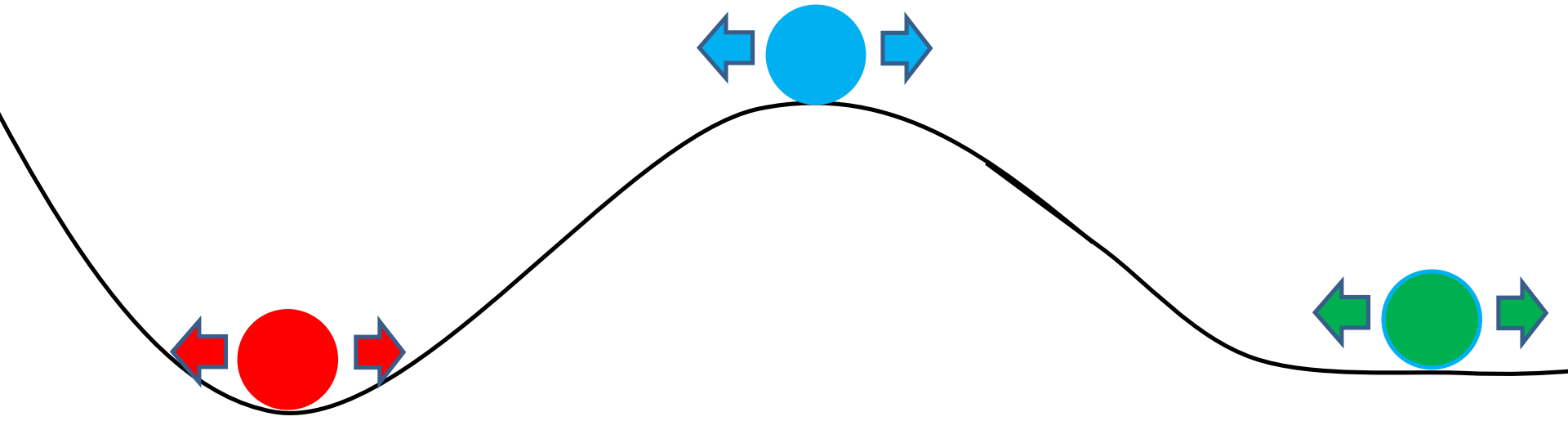


「1-2 摂動と不安定」の内容

- 基本場を元の方程式からさっぴいて現れる摂動と安定性の議論から以下のことがわかる
 - 水平運動を特徴づけるのは慣性安定度や絶対渦度
 - 二次循環（動径風と鉛直風）の構造上の特徴
- 温度風平衡の式に熱力学の第一法則を結びつけることで、加熱及び摩擦に対する二次循環の応答が説明できる (Sawyer-Eliassenの方程式)

物理学における安定性

- 物理学では「ちょっとした変化が大きな変化になる」ことを不安定という
- 例：下図の静止状態にあるボールの速度を考える。
赤：安定、青：不安定、緑：中立
→ボールの少しの動き（擾乱）が拡大するかどうかはその環境の状態（坂；基本場）に依存している
- 基本場と擾乱が何なのかは、議論する本人が決める



成層安定性

- パーセル法により乾燥気体の鉛直運動を考えると、

$$\frac{D^2 \delta z}{Dt^2} = - \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \delta z = -N^2 \delta z$$

- ここで N^2 を成層安定度といい、 N は空気塊の振動数を表している。
- 解釈：基本場の温位が上空ほど低いとき $\partial \theta / \partial z < 0$ 空気塊の微小な変位 δz は時間を追って拡大する。逆に上空ほど高いとき $\partial \theta / \partial z > 0$ は気塊は鉛直に振動。

慣性安定性：傾度風平衡の近傍

円筒座標系(r, ϕ, z)において密度が一定で粘性拡散項を無視し、鉛直流がないとすると、

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - f v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = 0$$

基本場は傾度風平衡にあり、かつ、動径風速=0とする。また、 f 面を考える。

$$-\frac{\bar{v}^2}{r} - f \bar{v} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r}, \quad u = u'$$

この条件のもとで、水平風速摂動 $(\cdot)'$ に関する式を立てると
(気圧・鉛直風摂動と摂動の2乗に関する項は無視)

→次ページ

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) v' = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) u' = 0.$$

これを組み合わせると

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + I^2 u' = 0, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + I^2 v' = 0,$$

相対渦度

$$I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$$

傾度風平衡及び $u=0$ の状態からの水平風速摂動は慣性振動を起こす。 I^2 は慣性安定度と呼ばれる。周期は $2\pi/I$ 、水平運動のスケールは小さい(プールの例え?)

講演後コメント：慣性振動と言いつつ、ラグランジュ微分でなく、オイラー微分なのは確かに気持ち悪いです。局所慣性振動・局所慣性円と呼ぶべき？

基本場のuをゼロにしなかったら？

$$\frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} & \frac{2\bar{v}}{r} + f \\ f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} & -\frac{\bar{u}}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

最初の行列の行列式を取ると

$$-Det = \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) - \frac{\bar{u}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}$$

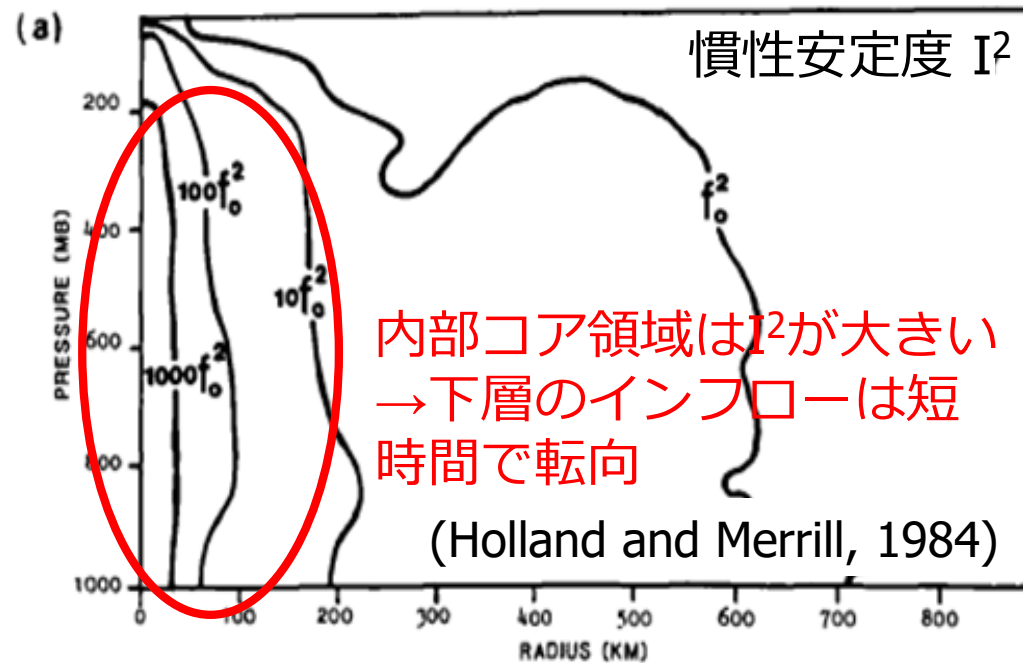
となるので、これが、 u' と v' の振動に関わる時間スケールとなる。

慣性安定度

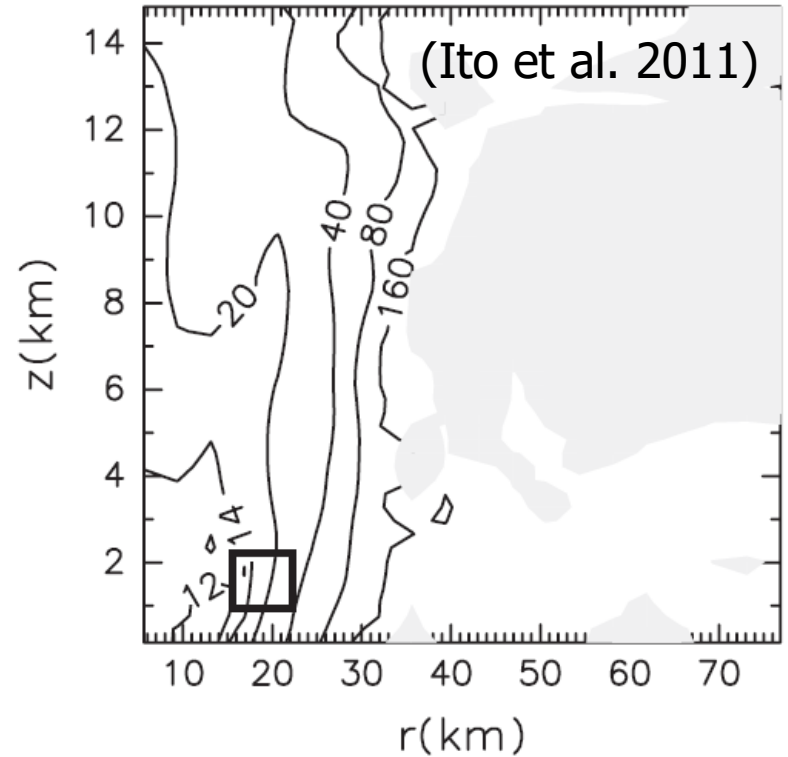
$$I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$$

- ・ 台風中心付近では $f + \bar{\zeta}$ が大きく、慣性安定度も大きい。
- ・ u' と v' は周期 $2\pi/I$ (台風内部では $<1h$)で振動する
 - 台風の中心に向かう吹込みは短時間で0になる。
 - 水平発散は $\phi = \partial(ur)/\partial r$ なので水平収束が存在する

台風観測のコンポジット解析に基づく慣性安定度



軸対称モデルにおける振動周期(分)



慣性安定度と絶対角運動量

- 慣性安定度 $I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + I^2 u' = 0, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + I^2 v' = 0,$$

なので、 $I^2 < 0$ (慣性不安定) で摂動は拡大する

- 絶対角運動量 $M = rv + \frac{1}{2} fr^2$

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial M^2}{\partial r} = \frac{M}{r^3} \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{r^3} \left(rv + \frac{1}{2} fr^2 \right) \left(v + r \frac{\partial v}{\partial r} + fr \right) = I^2$$

なので、渦の外側に行くほど $|M|$ が小さければ慣性不安定になる。

壁雲の傾斜

- 壁雲は一般に上空に行くほど外側に向かうような傾斜を持つ

Hurricane Katrinaの眼の壁雲の様子



<http://www.noaanews.noaa.gov/stories2005/s2496.htm>



仲底商店 波照間島
@nakasoko85

フォローする

まるで天空の城ラピュタの龍の巣のような雲。目の中は晴れ渡り無風です。これから吹き返しの暴風が来ると思うと信じられない静謐な空気です。



18:36 - 2015年8月23日

1,693件のリツイート 1,167件のいいね



10 1,693 1,167

等絶対角運動量面を考えてみる

台風を中心

暖気核 T



$$\delta M = \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_z \delta r + \left(\frac{\partial M}{\partial z} \right)_r \delta z$$

$\delta M = 0$ となる面を考える $\rightarrow$

等M面の傾斜

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_M = - \left(\frac{\partial M}{\partial r} \right)_z / \left(\frac{\partial M}{\partial z} \right)_r$$

$$M = \frac{1}{2} f r^2 + r \bar{v} \text{ を代入する } \rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_M = - \frac{f + \bar{\zeta}}{\partial \bar{v} / \partial z}$$

$$\text{温度-風関係} \left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_r = \frac{g}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_p \text{ を代入する } \rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)_M = \frac{(f + \bar{\zeta})(f + 2\bar{v}/r)}{-(g/\theta_0)(\partial \theta / \partial r)} = \frac{I^2}{-(g/\theta_0)(\partial \theta / \partial r)} = \frac{\text{Inertial stability}}{\text{Baroclinicity}}$$

絶対角運動量面で傾きを考える

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_M = \frac{(f + \bar{\zeta})(f + 2\bar{v}/r)}{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)} = \frac{I^2}{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)} = \frac{\text{Inertial stability}}{\text{Baroclinicity}}$$

- 上空に行くと

暖気核がある： Baroclinicityが大きくなる

接線風速が弱くなる： I^2 は小さくなる

→壁雲は一般に上空に行くほど外側に向かうような傾斜を持つ

- 典型的な値で計算してみる。

$$\theta_0 = 250K, \delta\theta = 10K, \delta r = 25km, \frac{2\pi}{I} = 40 \text{ min} \rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_M = \frac{I^2}{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)} \approx 0.4$$

等温位面を考えてみる

$$\delta\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_z \delta r + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_r \delta z$$

$\delta\theta = 0$ となる面を考える $\rightarrow$

等 θ 面の傾斜 $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta = -\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)_z / \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_r$

分母と分子に g/θ_0 をかける $\rightarrow$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta = \frac{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)}{(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial z)} = \frac{-(g/\theta_0)(\partial\theta/\partial r)}{N^2} = \frac{\text{Baroclinicity}}{\text{Static Stability}}$$

講演後コメント：ただし、壁雲中の、物体は等 θ 面上ではなく、ほぼ等 θ_e 面上を通過するので、これが壁雲の勾配に等しいわけではありません。

基本場が渦である場合の摂動の振る舞いは 慣性安定度 I^2 で特徴づけられる

$$I^2 \equiv \left(f + \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right) = \left(f + \bar{\zeta} \right) \left(f + \frac{2\bar{v}}{r} \right)$$

地衡風平衡 (デカルト座標系)	基本場 (座標系)	傾度風平衡 (円筒座標系)
f^2 (※)	慣性安定度	I^2
$2\pi / f$	慣性周期・ 調節の時間スケール	$2\pi / I$
$(gH)^{1/2}/f, NH/f$	変形半径	$(gH)^{1/2}/I, NH/I$
$(gH + f^2/k^2)^{1/2}$	慣性重力波の 位相速度	$(gH + I^2/k^2)^{1/2}$
$(\nu / f)^{1/2}$	エクマン境界層厚さ	$(\nu / I)^{1/2}$

(※)水平シアが弱い場合

Sawyer-Eliassenの方程式を用いた 二次循環の理解

- 質量流線関数 ψ を以下のように定義する。

$$\psi \equiv -r \int_0^z \rho_0 u dz$$

- 質量保存則より $\partial(\rho_0 r u) / \partial r + r \partial(\rho_0 w) / \partial z = 0$

$$u = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Sawyer-Eliassenの方程式

- 温度-風関係と熱力学の第一法則を組み合わせ、熱源と運動量源（摩擦など）に対する二次循環の応答をみることができる。
- 導出の方針：温度-風関係の式の時間微分を取り、線形化された「接線風速の運動方程式」「熱力学第一法則」を組み合わせ、時間変化項を消去する。

$$\text{温度-風関係(※)} \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r}$$

※右辺は等圧面上で成り立つので、簡単のため、
zは幾何高度ではなく対数圧力を使って定義される
偽高度だと思ってください。

時間微分 ↓

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$$



整理

$$\frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$$

接線方向の
運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial r} - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi - \frac{uv}{r} - fu = -u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi$$

$$\frac{2}{r} \left(-u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(-u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi \right) \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$$

熱力学の
第一法則

$$\frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{u}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{w}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\dot{Q}}{C_p T_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(-u\zeta - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\varphi \right) \right\} = \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(-u \frac{\partial \theta}{\partial r} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\theta_0 \dot{Q}}{C_p T_0} \right) \right)$$

整理

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(-u(f + \zeta) - w \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \right\} - \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(-u \frac{\partial \theta}{\partial r} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) F_\phi \right\} + \frac{g}{C_p T_0} \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \right)$$

慣性安定度と成層安定度の定義 $I^2 = \left(f + \frac{2v}{r} \right) (f + \zeta), N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ -I^2 u - \left(\frac{2v}{r} + f \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) w \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial r} u + N^2 w \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) F_\phi \right\} + \frac{g}{C_p T_0} \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \right)$$

温度-風関係 $\gamma = - \left(f + 2v/r \right) (\partial v / \partial z) = - (g / \theta_0) (\partial \theta / \partial r)$

質量流線関数の定義 $u = - \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$

Sawyer-Eliassenの方程式

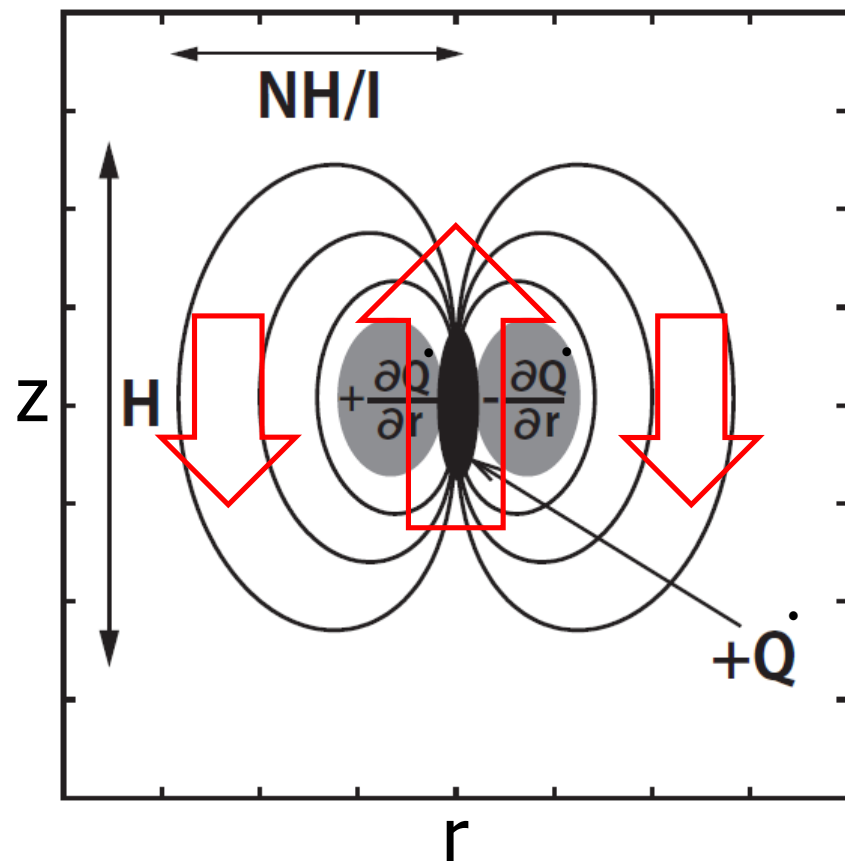
$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\gamma}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{I^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{2v}{r} + f \right) F_\phi \right\} + \frac{g}{C_p T_0} \left(\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} \right)$$

Sawyer-Eliassen方程式の解釈

- 簡単のため、 I と N が一定とし、 $\gamma = 0$ 、運動量源無しとして、加熱源 $\dot{Q}$ に対する二次循環の応答を考える。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{N^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I^2}{r \rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{g}{C_p \theta_0} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r}$$

- この式から分かること $\propto -\psi$
 - 右辺は加熱源をはさんで正と負になる。左辺は $-\psi$ (質量流線関数)に概ね比例する
 $\Rightarrow$ 加熱源で上昇流、その周りで下降流となる二次循環
 - 二次循環のアスペクト比は、左辺の2項の比較から I/N
 $\Rightarrow$ 慣性安定度と成層安定度で二次循環の構造が決まる。



Sawyer-Eliassen方程式における変数変換

- Schubert and Hack (1983)は半径 r を座標に使う代わりに、以下で定義されるポテンシャル半径 R を使うことを提案。
(定義より、 R が一定ならば、絶対角運動量 M も一定)

$$M = \frac{1}{2} f R^2 = \frac{1}{2} f r^2 + r v$$

- Sawyer-Eliassen方程式は以下のようなになる(導出は省略)。
(q は渦位に定数をかけたもの、
 s は変換された座標系における慣性安定度)

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{q}{R} \frac{\partial (R\psi)}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(s \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial R}$$

- すなわち、順圧大気中における熱源に対する二次循環の応答は、傾圧大気においても半径座標をポテンシャル半径座標(絶対角運動量座標)に沿って成り立っている。

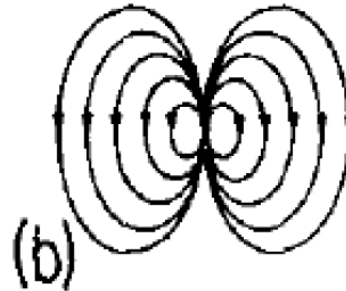
熱源と運動量源に対する応答

熱源

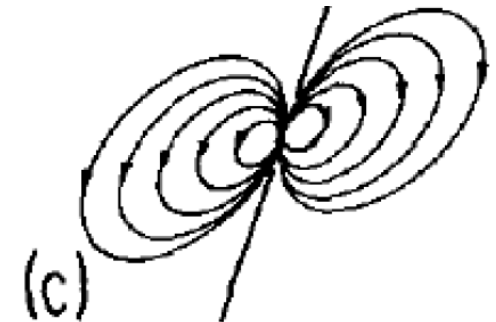
$N > I$, 順圧



$I > N$, 順圧

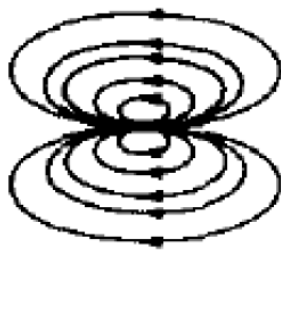


傾圧

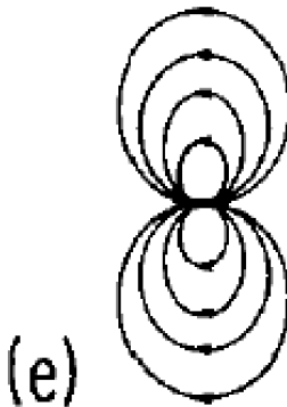


運動量源

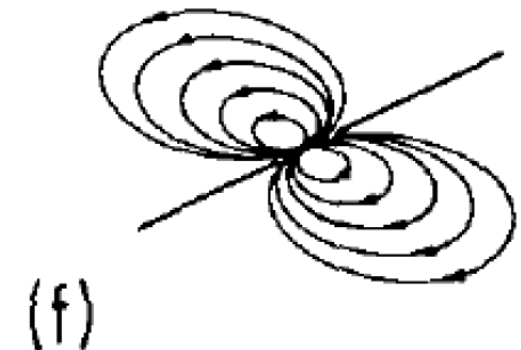
$N > I$, 順圧



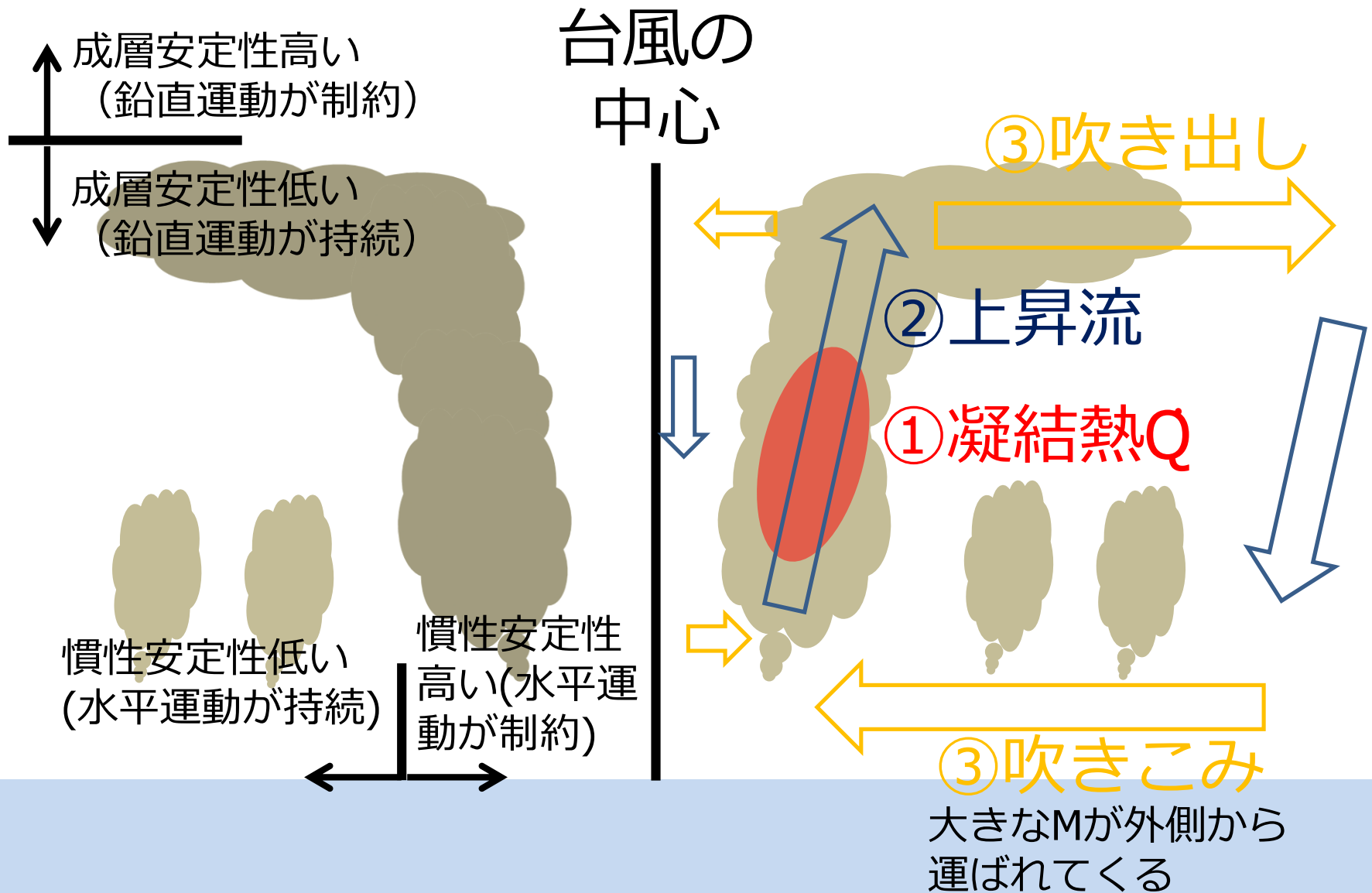
$I > N$, 順圧



傾圧

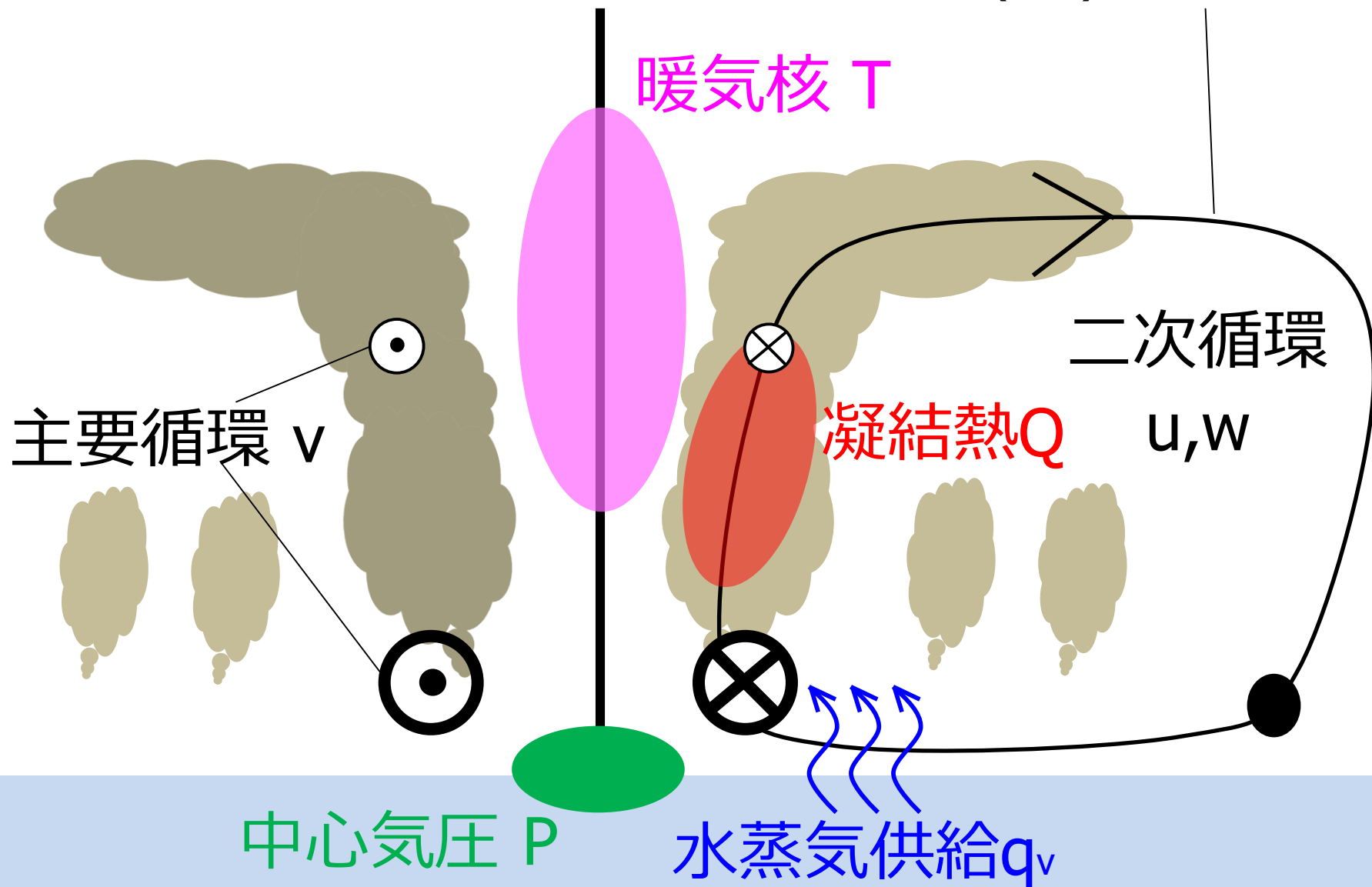


まとめ：安定性と二次循環



台風の中心

摩擦で減ることを除き
循環に沿って
 $M = (1/2)fr^2 + vr \sim \text{一定}$



おまけスライド

いくつかの熱力学に関する法則

- クラウジウス-クラペイロンの法則

$$\frac{de_s}{e_s} = \frac{L}{R_v T^2} dT$$

- キルヒホフの法則

$$dL = (C_{pv} - C_w) dT$$

- 偽断熱過程：水蒸気が液体になったら取り去られるとする過程。対流雲などではよい近似になるものと想定される。不可逆的。

いろいろな「相当温位」

- 通常、以下の前提を踏まえている
 - 過飽和は起きていないとする
 - すべての相の水物質は平衡状態にあるとする
 - 凝結した水物質の扱いについて主に2種類
 - 空気塊とともに存在する(降水なし)
shallowでは適切であり、可逆的な過程である。
 - 凝結したら取り去られる(降水あり；偽断熱過程)
convective cloudsでは適切であり、非可逆的な過程である。
- Iribarne and Godson (1973)
 - 降水のない雲に対して正確な表現
- Bolton (1980)
 - 降水のある雲に対して適切であるが、経験式による回帰で係数を決めているため、理論的な考察には向かない。
- Bryan (2008)
 - 上記2つのレビューと降水のある雲に対する近似的理論式

飽和相当温位の導出(吉崎・加藤「豪雨・豪雪の気象学」)

- ・ 偽断熱過程を考え、湿潤気体の熱力学第一法則

(1kgあたりの) 非断熱加熱率 飽和水蒸気
混合比

$$Q = \left(C_{pd} + q_v^* C_{pv} \right) \frac{DT}{Dt} - \frac{R_d T}{p - e_s} \frac{D(p - e_s)}{Dt} - \frac{q_v^* R_v T}{e_s} \frac{De_s}{Dt}$$

非断熱加熱が凝結だけ($Q = -L(Dq_v^* / Dt)$) だとすると
Clausius-Clapeyronの式とKirchhoffの式を使って、

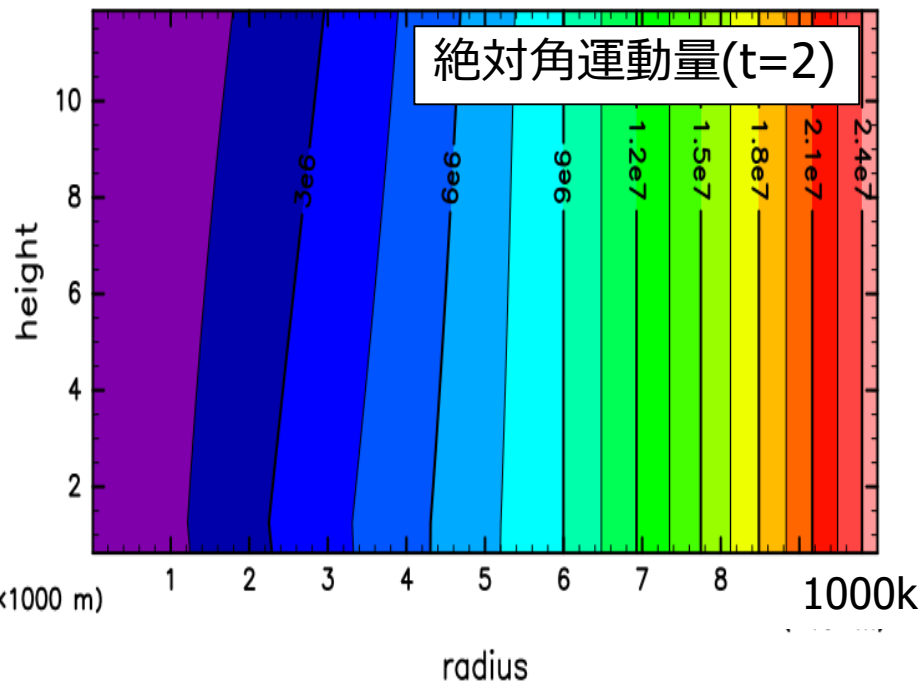
$$\frac{C_{pd} + q_v^* C_w}{T} \frac{DT}{Dt} - \frac{R_d}{p - e_s} \frac{D(p - e_s)}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{Lq_v^*}{T} \right) = 0$$

また、 $C_{pd} + q_v^* C_w \approx C_{pd}$ とすると

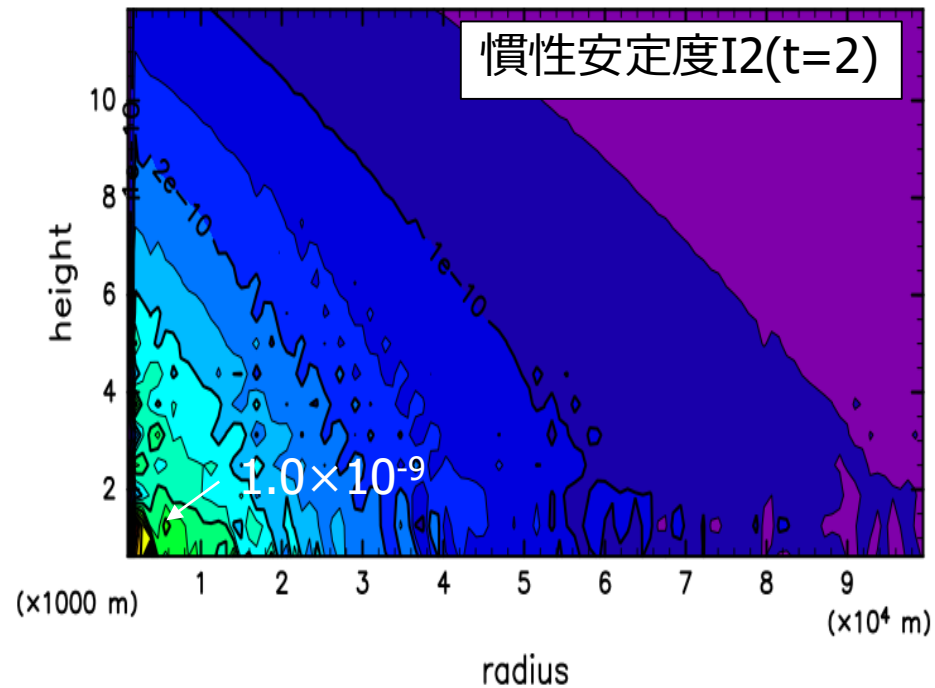
$$\theta_e^* = T \left(\frac{p_0}{p - e} \right)^{R_d / C_{pd}} \exp \left(\frac{Lq_v^*}{C_{pd} T} \right) = \theta \exp \left(\frac{Lq_v^*}{C_{pd} T} \right) = \text{const.}$$

θ_e^* を **飽和相当温位** と呼ぶ。未飽和湿潤気体に関し、
Tを露点温度に置き換えたものを **相当温位** と呼ぶ。

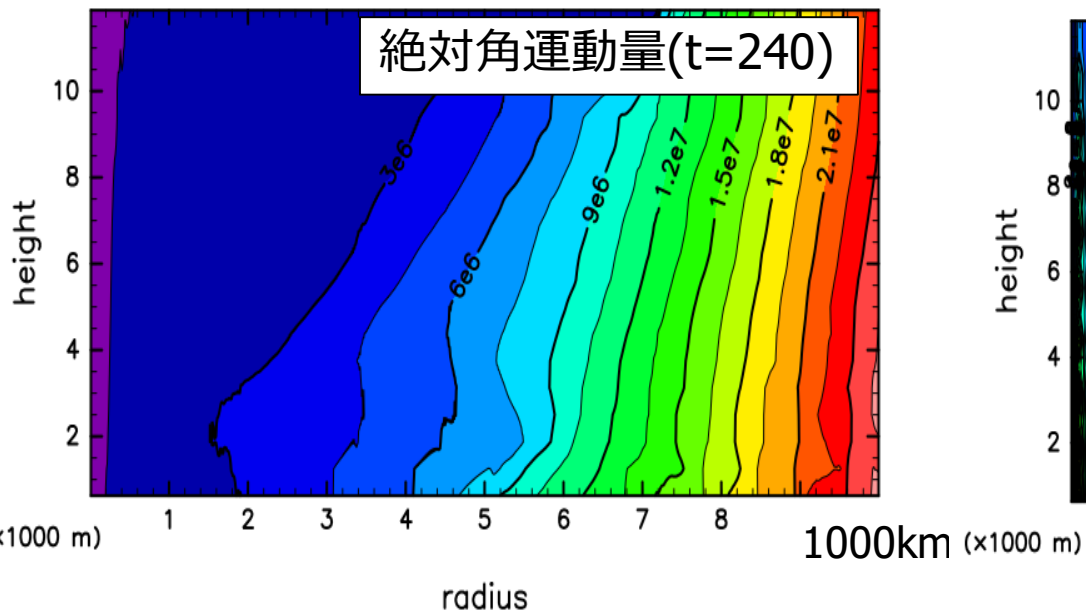
絶対角運動量(t=2)



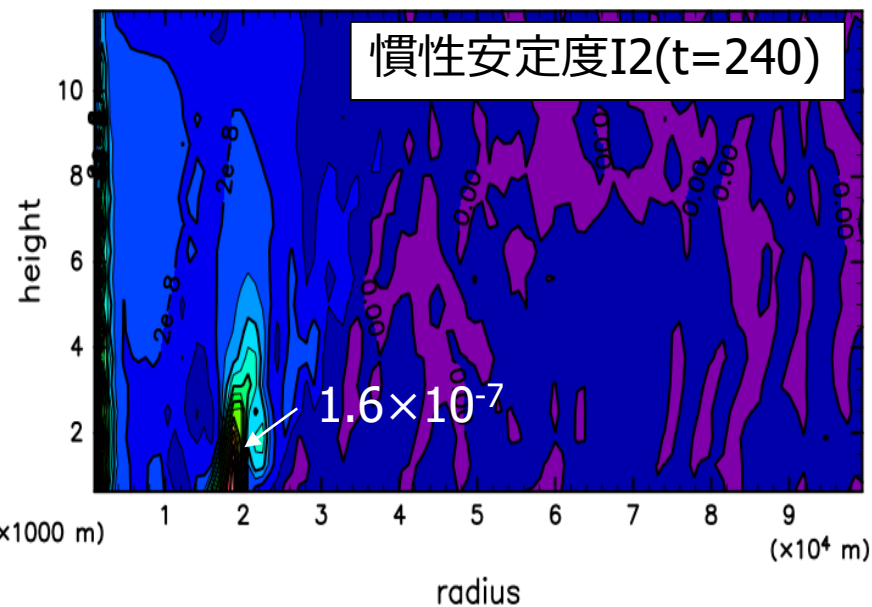
慣性安定度I2(t=2)



絶対角運動量(t=240)



慣性安定度I2(t=240)



温度-風関係 $\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{g}{\bar{T}}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial r}\right)_p$ の導出

$$\text{傾度風平衡} \quad \frac{\bar{v}^2}{r} + f\bar{v} = \frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z$$

z で微分 & r と z の偏微分の順序を入れ替え $\rightarrow$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r$$

$$\text{静水圧平衡} \quad \partial\bar{p} / \partial z = -\bar{\rho}g \rightarrow$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z - \frac{g}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z$$

$$\partial\bar{p} / \partial z = -\bar{\rho}g \rightarrow$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = -\frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z$$

整理 →

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z - \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\frac{(\partial\bar{p}/\partial r)_z}{(\partial\bar{p}/\partial z)_r}\right)$$

$$\delta\bar{p} = \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z\delta r + \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\delta z \text{ で } \delta\bar{p} = 0 (\bar{p} \text{ が一定}) \text{ として } \delta r \text{ で割る} \rightarrow \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r}\right)_z + \left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_p = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p\right)$$

$$\delta\bar{\rho} = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p\delta r + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial p}\right)_r\delta p = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z\delta r + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\delta z \text{ で } \delta p = 0 (p \text{ が一定}) \text{ として } \delta r \text{ で割る}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p = \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_z + \left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p \rightarrow$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f\right)\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}\right)_r\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial r}\right)_p$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T}$$

← 微小変化の計算

$$\delta \bar{p} = R \bar{T} \delta \bar{\rho} + R \bar{\rho} \delta \bar{T}$$

← $\delta \bar{p} = 0$ ($\bar{p}$ が一定)として $\bar{\rho} R \bar{T}$ で割る

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{T}} \right)_p = - \frac{\bar{\rho}}{\bar{T}}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \right)_p = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{T}} \right)_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_p$$

← $\delta p = 0$ として $\delta \bar{T}$ で割る

$$\delta \bar{\rho} = \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{T}} \right)_p \delta \bar{T} + \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p} \right)_{\bar{T}} \delta p$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_r = \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right)_r \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \right)_p$$

$$\partial \bar{p} / \partial z = -\bar{\rho} g \rightarrow$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_r = - \frac{g}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial r} \right)_p$$

$$\left(\frac{2\bar{v}}{r} + f \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)_r = \frac{g}{\bar{T}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right)_p$$

自由表面を持つ流体を考え 調節過程について調べる

$$\frac{Du}{Dt} - \left(f + \frac{v}{r} \right) v = -g \frac{\partial \eta}{\partial r}, \quad \frac{Dv}{Dt} + \left(f + \frac{v}{r} \right) u = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{H}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0,$$

- ・ 簡単のため、基本場が剛体回転の状態を考える。
- ・ 基本場（傾度風平衡）と偏差成分(水平風速及び自由表面の変位)に分ける。
- ・ 積分変換（ハンケル変換）を施し、波数kの空間で解析解を得て、最終状態を計算すると、

↓
(次のスライドに続く)

$$\hat{v} = \frac{1}{\mu^2} \left\{ -\frac{gk}{f + \bar{\zeta}_a} \hat{\eta}_0 + \frac{gHk^2}{(f + \bar{\zeta}_a)^2} \hat{v}_0 \right\}$$

$$\hat{\eta} = \frac{1}{\mu^2} \left(\hat{\eta}_0 - \frac{Hk}{f + \bar{\zeta}_a} \hat{v}_0 \right) \quad \text{ただし、} \mu = \sqrt{1 + gHk^2 / (f + \bar{\zeta}_a)^2}$$

特別な場合を考える。

$$\begin{aligned} l = 1/k &\ll \sqrt{gH} / I & \text{ならば } \hat{v} &\rightarrow \hat{v}_0 & \hat{\eta} &\rightarrow \sqrt{H/g} \hat{v}_0 \\ l = 1/k &\gg \sqrt{gH} / I & \text{ならば } \hat{v} &\rightarrow \sqrt{g/H} \hat{\eta}_0 & \hat{\eta} &\rightarrow \hat{\eta}_0 \\ l = 1/k &= \sqrt{gH} / I & \text{ならば } \hat{v} &= \frac{1}{2} (\hat{v}_\eta + \hat{v}_0) & \hat{\eta} &= \frac{1}{2} (\hat{\eta}_0 + \hat{\eta}_v) \\ & & & (\hat{v}_\eta \equiv \sqrt{g/H} \hat{\eta}_0, \hat{\eta}_v \equiv \sqrt{H/g} \hat{v}_0) \end{aligned}$$

「ロスビーの変形半径」 $l \doteq \sqrt{gH} / I$ よりも

スケールが小さければ、風速場の変位に調節される。

スケールが大きければ、質量場の変位に調節される。

渦度と絶対角運動量の関係

- 軸対称系における絶対渦度ベクトル

$$\boldsymbol{\omega} = \left(-\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, f + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right)$$

- 絶対角運動量の方角微分

$$\nabla M = \nabla \left(\frac{1}{2} fr^2 + rv \right) = \left(fr + v + r \frac{\partial v}{\partial r}, 0, r \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

- 両者の内積はゼロ $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla M = 0$

⇒等絶対角運動量面と絶対渦度ベクトルは平行

⇒等絶対角運動量面に沿った向き(変換後のZ軸)は絶対渦度ベクトルの主軸の向きとなっている

- ここで使われた渦位 $q = \frac{g}{f\theta_0} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho} = \frac{g}{f\theta_0} \frac{f + \zeta}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial Z}$
(回転軸方向の成層安定度×渦度)