京都大学 伊藤耕介

(2025/06/01)

台風物理学の基礎

本資料について

本資料は，大気物理学の基礎に立ち,「台風」という渦についてわがままに理解を試みたものである．ただし，まだまだ完成度は十分でないと考えられるので，著作としての引用はご遠慮いただきたい．また，個人的にマニアックだと思う内容については，節の番号に (*) を付している．もし，誤りを見つけられた場合には ito.kosuke.2i（あっと）kyoto-u.ac.jp にご連絡いただけると幸いである．

現実の台風は，さまざまな時空間スケールの現象が鉛直・水平方向に複雑に絡み合っていて，一度に理解することは難しい．本書でいう「大気物理学の基礎に立つ」という言葉は，台風の特徴を理解するために，あるときには，一側面を思い切って捨てて状態をクリアにしてから理解をし，そして，またあるときには，別の一側面を切り捨てて理解を図ろうとする立場を指している．台風というのが力学的・熱力学的にどのような構造を持っているかについては，軸対称性の仮定を置いてわかることがたくさんあるし，台風の移動に関しては鉛直構造を思い切って無視して理解できることもある．

はじめに，台風の構造を説明するにあたって，基礎方程式系の導出と用語の整理を行う．といっても，一般的な大気物理学と変わるわけではなく，ナヴィエ・ストークスの方程式，状態方程式，質量保存則，熱力学の第一法則が基礎方程式を構成している．ただし，台風の構造は近似的に軸対称的だとみなせるので，円筒座標系における方程式を導いておく．そのほか，渦度，循環，渦位，絶対角運動量といった渦を特徴づける物理量についても説明する．

その後，成熟していて，軸対称的な台風について，力学・熱力学的観点から説明を行う．組織化が十分に進んだ成熟期の台風中心の対流圏中層から上層には「眼」と呼ばれる雲のない領域が現れ，眼を囲むスタジアム状の壁がそれを取り囲むような軸対称的な構造を持つ．背景場の水平風に鉛直シアがない状況においては，軸対称成分の値に比べて，非軸対称成分はあまり大きくないため，台風の

第一次近似的な構造を理解することに役立つからである．これによって，台風という渦を凝結熱によって構造が維持されるシステムとして理解することができる．

その次に，台風の渦力学としての側面に注目してみる．流体力学における渦力学は，非常に奥深いテーマだが，台風の挙動を理解するうえで重要と思われるトピックを中心に取り上げて扱う．非断熱加熱の役割についてをひとまず無視して，軸対称な構造を基本場としたときに現れる渦ロスビー波やなぜ海盆スケールの台風が存在しないのかなどついて，理解を図る．

また，将来的には，風の鉛直シアの効果，台風の進路・強度・発生に関することがら，台風に対する地形の影響，台風の温帯低気圧化，台風と海洋の相互作用などについても記述を加えていく予定である．

第1章　台風物理学の基礎となる方程式

1.1　デカルト座標系における基礎方程式

台風の物理を考えるといっても，基礎となる物理法則が他の大気現象と大きく変わるわけではない．しかし，台風は基本的に第一次近似として軸対称的な構造を持っているので，直線直交座標系の代わりに円筒座標系を用いて記述することで説明できることも多い．本章では，一般的な直線直交座標系における基礎方程式系を出発点として，これを円筒座標系に変換したものを導出する．

地球の回転を想定した回転系におけるデカルト座標 (x, y, z) 上で定義された変数に関して，以下の基礎方程式を考える．導出については，Holton and Hakim (2012) などを参照のこと．

- ナヴィエ・ストークスの方程式

$$\frac{D\boldsymbol{V}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

- 熱力学の第一法則

$$\frac{\dot{Q}}{C_p T} = \frac{D\left(\log\theta\right)}{Dt} \tag{1.2}$$

- 気体の状態方程式

$$p = \rho R T \tag{1.3}$$

- 質量保存則

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{1.4}$$

ここで，t は時刻，p は気圧，ρ は密度，$\boldsymbol{F}$ は外力，$\dot{Q}$ は非断熱加熱率，C_p は乾燥大気の定圧比熱，T は気温，θ は温位，R は乾燥大気の気体定数，T は気温を表す．$\frac{D}{Dt}$ はラグランジュ微分であり，オイラー微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ との間には，

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.5}$$

という関係がある．$\boldsymbol{V}$ は速度ベクトルで，(x, y, z) 方向の成分をそれぞれ (v_x, v_y, v_z) とする．ちなみに，

$$v_x = \frac{Dx}{Dt}, v_y = \frac{Dy}{Dt}, v_z = \frac{Dz}{Dt}, \tag{1.6}$$

である．

ナヴィエ・ストークスの方程式の左辺第二項はコリオリ力，右辺第一項は気圧傾度力，右辺第二項は外力を表している．ナヴィエ・ストークスの方程式を $xyz-$ 成分に分けて書くと，以下のようになる．

$$\frac{Dv_x}{Dt} - fv_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \tag{1.7}$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} + fv_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y \tag{1.8}$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \tag{1.9}$$

ただし，$\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ であり，コリオリ項の鉛直成分等は無視している．

湿潤大気を厳密に扱うためには，水蒸気が空気に含まれることや水・氷が生じることに伴う様々な特徴の変化を考慮に入れなければならない．例えば，氷を無視したとしても，以下のようなことを考える必要が出てくる．

- 相変化に伴って凝結熱や蒸発熱が生じる．
- 気体の比熱が変化する．これにより，断熱減率も変化するため，(乾燥断熱的に基準面に戻したときの温度が定義である) 温位の値も変わる．
- 気体の密度が変化する
- 水蒸気圧が生じる
- 水蒸気量の時間変化と液体の水の時間変化を基礎方程式に加える必要がある．
- 凝結が起こった際に，それがそのまま留まる (雲を想定) か，液体が抜けていく (対流性降水を想定) かを定めないと，準保存量を定義できない．

本資料では簡単のため，水物質が増えたことに伴う影響は，相変化に伴って熱が生じることだけであるとしている．乾燥気体と湿潤気体の分子量の違いを考慮するために，温度や温位の代わりに仮温度や仮温位を使う方がより正確であるが，そのような効果は無視している．

1.2 円筒座標系における基礎方程式

主として軸対称的な構造をもつ台風に関する取扱いをするために円筒座標系 (r, ϕ, z) を考える．ここで，r は原点からの半径，ϕ が基準となる方向からの角度 (方位角) であり，ここでは，デカルト座標の x 軸が基準となり反時計回りに正の方向を取るとする．z はデカルト座標における高度 z と同じである．r 軸の方向を動径 (radial) 方向，ϕ の増加する方向を接線 (方位角; azimuthal) 方向と呼ぶ．

このように向きを定めると，デカルト座標 (x, y, z) と円筒座標 (r, ϕ, z') は，以下のような関係を持つ．

$$x = r\cos\phi \tag{1.10}$$

$$y = r\sin\phi \tag{1.11}$$

$$z = z' \tag{1.12}$$

または，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.13}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \tag{1.14}$$

$$z' = z \tag{1.15}$$

偏微分の連鎖律にこれを適用すると，$h = h(x, y, z) = h(r, \phi, z')$ に関して，

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos\phi\frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial h}{\partial \phi} \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \sin\phi\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial h}{\partial \phi} \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z'} \tag{1.18}$$

という式が現れる．

また，$r\phi z-$ 方向の風速成分を以下のように定義し，それぞれ動径風，接線風，鉛直風と呼ぶことにする．

$$u = \frac{Dr}{Dt} \tag{1.19}$$

$$v = r\frac{D\phi}{Dt} \tag{1.20}$$

$$w = \frac{Dz'}{Dt} \tag{1.21}$$

ベクトル自体は座標変換によって変化することはないが，ベクトル「の成分」は座標変換によって変化する．具体的には，(v_x, v_y, v_z) と (u, v, w) のあいだに，

$$
\begin{aligned}
v_x &= u\cos\phi - v\sin\phi && (1.22)\\
v_y &= u\sin\phi + v\cos\phi && (1.23)\\
v_z &= w && (1.24)
\end{aligned}
$$

あるいは逆に

$$
\begin{aligned}
u &= v_x\cos\phi + v_y\sin\phi && (1.25)\\
v &= -v_x\sin\phi + v_y\cos\phi && (1.26)\\
w &= v_z && (1.27)
\end{aligned}
$$

の関係がある．これらを使うと，ラグランジュ微分は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} && (1.28)\\
&= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + w\frac{\partial}{\partial z} && (1.29)
\end{aligned}
$$

ここまでの知識をもとにして，円筒座標系における基礎方程式系を導出していく．

まず，ナヴィエ・ストークスの方程式に関して，$\cos\phi\times$ 式 (1.7)$+\sin\phi\times$ 式 (1.8)，および，$-\sin\phi\times$ 式 (1.7)$+\cos\phi\times$ 式 (1.8) を計算し，それに，式 (1.22) と式 (1.23) を代入して整理すると，各成分について，以下のような式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + F_r && (1.30)\\
\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu &= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + F_\phi && (1.31)\\
\frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z && (1.32)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ は単位ベクトルが場所によって方向を変えるため，デカルト座標に比べて扱いが複雑となっており，uv/r と $-v^2/r$ はこの影響により出てくる項である．これらの項はメトリック項と呼ばれ，中でも $-v^2/r$ は慣例に従って遠心力項と呼ばれる．

中心に対する軸対称性を仮定してよいならば，方位角方向に物理量の変化が存在しないので，

$$\frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 \tag{1.33}$$

となる．この場合，方程式は簡単化され，

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + F_r \tag{1.34}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \phi} + F_\phi \tag{1.35}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \tag{1.36}$$

となる．また，ラグランジュ微分も

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.37}$$

と簡単になる．

第2章　軸対称的な台風の構造 I: 平衡状態

2.1　おおまかな話

台風は，熱帯あるいは亜熱帯の暖かい海上で発達する上空に暖気核を持った低気圧であり，中心付近に非常に深い対流を伴うシステムである．暖かい海上で西進する偏東風波動やモンスーンによって生じた擾乱が発達すると，前線を持たない低気圧としてより組織的な構造を持つようになり，そのうちの一部はやがて台風として激しい擾乱となる[1)]．

台風システムの内部コアの軸対称的な構造に関しては．航空機やレーダーエコーを用いた観測により，1960 年代にすでに多くのことが明らかとなっていた (e.g. Palmén and Riehl, 1957; Hawkins and Rubsam, 1968)．十分に成熟した台風の内部構造の一例として，図 2.1 に 1999 年に発生したハリケーン Fran に関して航空機とレーダーエコーで得られたコンポジット解析の結果を示す (Emanuel, 2005)．内部コア領域においては，台風の接線風速の分布は強い低気圧性循環を形成しており，中心から少し離れたところに接線風速が最大値を示す地点がある．台風の中心付近には風速の弱い領域があり，台風の眼と呼ばれている．動径風速は，台風の下層では最大風速半径に吹き込む向きとなっており，上層では吹き出す向きとなっている．これらの動径風速は，それぞれ，下層のインフロー及び上層のアウトフローと呼ばれる．また，この図には現れていないが，壁雲の外側の対流圏中層 (8-10 km) には弱い吹き込みが観測されることもあり，ミッドレベルインフローと呼ばれている (e.g. Marks and Houze, 1987)．上昇流は最大風速半径の近傍で大きな値を示している．また，動径風と鉛直風が形成している動径-鉛直断面における循環は，主要循環に対して二次循環と呼ばれている．中心付近の上層には温度及び温位の高い気塊が存在しており，暖気核（ウォームコア）と呼ばれている．台風状況下の大気下層では低気圧性の強い循環が生じ，中心付近では気流の収束とそれに整合的な強い上昇気流が生じている．これによって湿った気塊は下層から上層へと運ばれ，中心から半径 100 km 程度の広い範囲にわたって非常に激しい降水が生じる．

[1)] 台風を表す用語・用法と定義は，機関ごとに異なっている．世界気象機関 (WMO) では，10 分間の平均風速が 17.2 m/s を超えるような熱帯性擾乱を指す

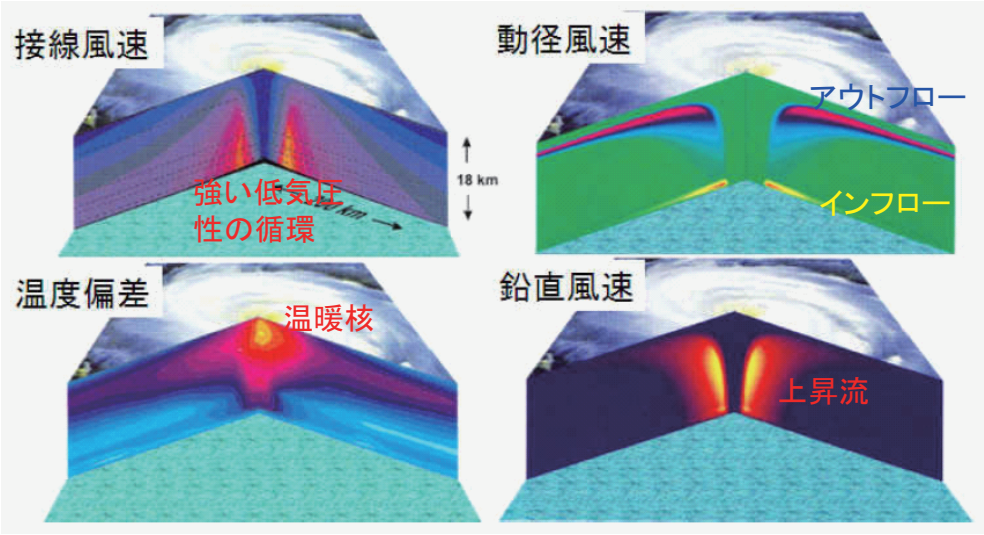

図 2.1: 台風 Fran(1999 年発生) の航空機観測と衛星観測に基づいたコンポジット解析の結果．Emanuel (2005) をもとに作成したもの．

2.2 軸対称的な台風の方程式

軸対称的な台風について説明するために，座標系を円筒座標系 (r, ϕ, z) とする方程式系を考えてみる．本章では，簡単のため，コリオリパラメータ f を一定として (f 面) 取り扱うことにする．

2.3 傾度風平衡と静水圧平衡

台風の渦は傾度風平衡と静水圧平衡の近傍にある．特に，一般の気象学の教科書に現れる準地衡的な状態ではないという点は，台風の構造や力学を大きく特徴づけるものとなっている．地衡風平衡との違いについては次節以降で詳しく述べることにして，本節では「傾度風平衡や地衡風平衡とはどんな仮定を前提に導かれた結果であるか？」という点について振り返る．

2.3.1 傾度風平衡

そもそも，傾度風平衡は定常状態において遠心力・コリオリ力・気圧傾度力のつりあいが成り立つとした平衡状態であった．傾度風速を v_{G} とすると，接線風速に関する傾度風平衡の式は，流れの曲率を R として，以下のようにあらわされる．

$$\frac{v_{\mathrm{G}}^2}{R} + f v_{\mathrm{G}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2.1}$$

傾度風速，すなわち，ある気圧分布が与えられたとして，傾度風平衡の仮定と整合的になる風速は，

$$v_{\mathrm{G}} = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} + \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}} \tag{2.2}$$

である．

この式は，動径風の運動方程式 (1.34) に定常状態を仮定し

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + F_u \tag{2.3}$$

さらに，

$$u\frac{\partial u^2}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - F_u \tag{2.4}$$

が他の項に比べて十分小さいという条件のもとに導くことができる．台風において，主要な風速成分は接線風 v であり動径風 u は相対的に小さい（と考えられてきた）ため，傾度風平衡の式が近似としてよく用いられてきたのである．

さて，それでは地衡風平衡は，近似式として妥当であろうか？地衡風平衡は定常状態においてコリオリ力・気圧傾度力だけの釣り合いを考えた平衡状態であり，遠心力の効果が無視されている．地衡風速を v_{geo} としたとき，地衡風平衡の式と地衡風速は以下のように表される：

$$fv_{\mathrm{geo}} \simeq \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2.5}$$

地衡風速は，

$$v_{\mathrm{geo}} \simeq \frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2.6}$$

である．

このため，与えられた気圧分布に対して，地衡風速と傾度風速との間には以下のような関係がある（R は流れの曲率を表す）．

$$v_{\mathrm{geo}}/v_G = 1 + v_G/fR \tag{2.7}$$

このことは，ロスビー数 v_G/fR が十分に大きい場合には地衡風近似が適当でないことを意味している．台風のスケールを当てはめると，ロスビー数は十〜数百程度の大きさとなるから，明らかに地衡風近似は適当ではない．以下では，基本場は傾度風平衡の状態にあるとする．すなわち，傾度風平衡の式は，

$$\overline{v} = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R^2}{4} + \frac{R}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial r}} \tag{2.8}$$

である．以下，上付きのバーは，傾度風平衡および 2.3.3 節で解説する静水圧平衡の状態を表すものとする．計算上は第二項の符号はどちらも取りうるのだが，台風を含めほとんどの低気圧において，北半球では正符号，南半球では負符号をとる．すなわち，北半球にある低気圧の周りでは，反時計回りの循環を形成し，南半球にある低気圧の周りでは時計回りの循環を形成する (Holton, 1992)．

2.3.2 super-gradient と sub-gradient

もし，傾度風の風速よりも風が強くなっている場合には，その状態は super-gradient（超傾度風）であると呼ばれる．逆に，傾度風の風速よりも風が弱くなっているならば，sub-gradient であると呼ばれる．現実大気の観測や数値モデルによる計算では，自由大気中では傾度風平衡がおおむね成り立っているものの，自由大気中でも壁雲に沿って sub-gradient と super-gradient な領域が存在するという指摘もある (Bryan and Rotunno, 2009) ほか，境界層内では super-gradient や sub-gradient の領域も見られる．

傾度風からのずれが生じる理由はいくつか考えられる．一つには，下層の壁雲より内側で見られるオーバーシュートと呼ばれる現象が挙げられる (Frank, 1984; Mitsuta et al., 1998)．これは，インフローの動径方向の微分 $\partial(u^2/2)/\partial r$ が無視できず，傾度風近似が適用できないということである．このようなオーバーシュートによる傾度風平衡からのずれは壁雲付近の下層の風速について顕著に見られる．すなわち，大気の下層では，強いインフローがあるため，傾度風平衡の平衡点より内側に入り込んでくる流体粒子が存在する．その結果，角運動量保存則から考えて，接線風速は傾度風平衡から予想される風速よりも強くなる．このことは，Montgomery et al. (2006) の航空機観測の結果にも表れており，最大接線風速 ($r = 42.5$ km, $z = 1$ km) は等角運動量線が内側に入り込んだところに得られている．

これを式で書くと以下のようになる．

$$u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - F_u > 0 \tag{2.9}$$

これが，超傾度風 (super-gradient wind) と呼ばれる状態である．

一方，境界層内では傾度風平衡から予想される風速よりも弱くなっている．これは，摩擦の寄与 (F_u) が相対的に大きいためである．式で書くと，

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}u^2\right) + w\frac{\partial u}{\partial z} - F_u < 0 \tag{2.10}$$

となる．これが sub-gradient wind の状態を表している．

2.3.3 静水圧平衡

鉛直風速の式 (1.36) の物理量のオーダーを考えると，主要な項は．気圧傾度力項と重力加速度項である．そこで，以下の式が台風内部でもおおむね成り立っている．

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \simeq -g \tag{2.11}$$

この関係式は，静水圧平衡の式と呼ばれる．

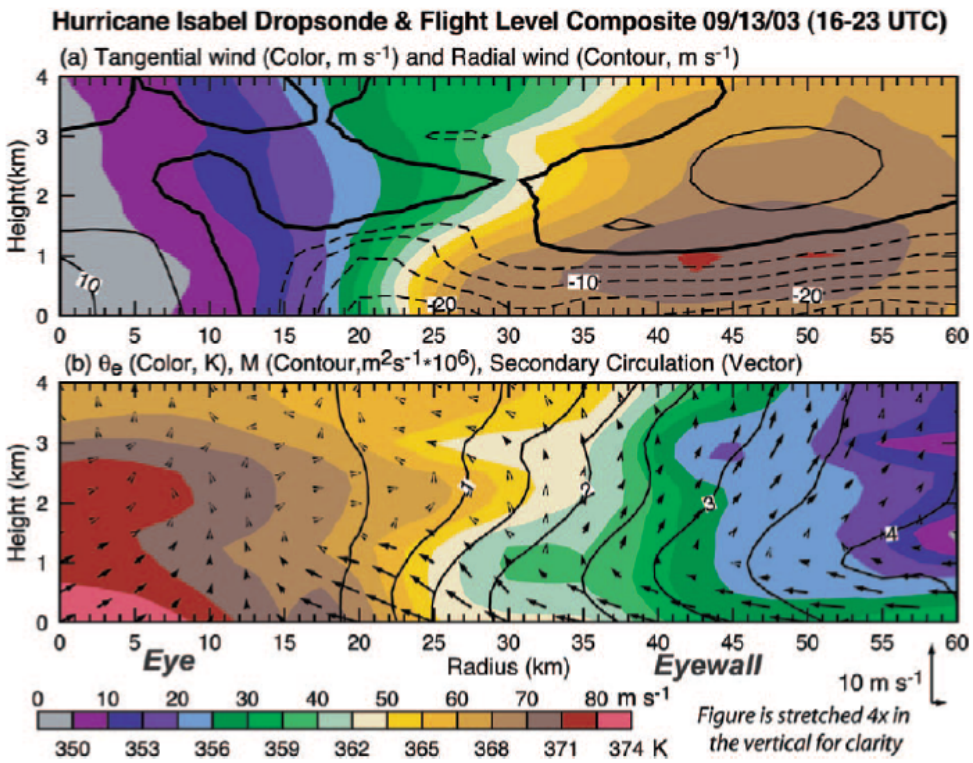

図 2.2: 航空機観測に基づいた Hurricane Isabel(2003) の方位角方向平均の (a) 接線風速（陰影）と動径風速（コンター）(b) 相当温位（陰影），等絶対角運動量（コンター），二次循環（矢印）Montgomery et al. (2006)

2.3.4 温度-風関係

もし，傾度風平衡に加えて静水圧平衡を加えるならば，以下の式で表される温度-風関係が導かれる[2)]．

$$\left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right)\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \simeq \frac{g}{\overline{\theta}}\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial r} \tag{2.12}$$

すなわち，傾度風平衡と静水圧平衡が成り立っている状態においては，適当な境界条件のもと，気圧の分布から，傾度風と温度の偏差が計算できることになる．台風の眼の領域の上空には暖気核（ウォームコア）とよばれる温位偏差の高い領域が存在していることが知られているが，温度-風関係を考えると，接線風が上空に行くに従って弱くなることと整合的である．

[2)]鉛直座標を p 座標にとる必要がある．鉛直座標を z 座標としている場合には余分な項が出てくるため，近似的にしか成り立たない．

2.3.5 慣性安定度

慣性安定度とは，渦が存在するときに微小な変位によってもとの渦の構造が崩壊するかどうかの指標となる値である．慣性不安定は，成層不安定に類似した構造を持つものとして特徴づけられる．すなわち，成層不安定の場合には，パーセルの鉛直方向の運動に関する微小な擾乱がどんどん拡大していくのに対し，慣性不安定の状況においては，パーセルの水平運動への微小な擾乱が拡大していく．また，慣性不安定は，角運動量が渦の外側で内側よりも大きくなっているときに満たされる．慣性安定度は以下の式で定義される．

$$I^2 \equiv \left(f + \frac{\partial \overline{v}}{\partial r} + \frac{\overline{v}}{r}\right)\left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right) = \left(f + \overline{\zeta}\right)\left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right) \tag{2.13}$$

ここで，ζ は円筒座標系における鉛直渦度 $(= \partial v/\partial r + v/r)$ を表している．

慣性安定度がなぜ重要なのかについては，3.1.1 節で順に説明するが，ひとことでいうならば，状態が地衡風平衡の近傍にあるときにはコリオリパラメータが基礎となる物理量であったのに対して，台風の内部コア領域のように状態が傾度風平衡の近傍にある場合においては慣性安定度が非常に基礎的な物理量となるという点は強調しすぎることはないだろう．

2.4 軸対称渦における近似的保存量

2.4.1 絶対角運動量

台風の渦の力学を考える上で重要な準ラグランジュ的保存量として，絶対角運動量及び相対温位や湿潤比エントロピーといった熱的な保存量が挙げられる．まずは，絶対角運動量について説明しよう．軸対称渦における絶対角運動量は位置 $\boldsymbol{r}$ において，質量 m の質点が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているときに，$\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ として定義される “ベクトル量” である．しかし，一般的な台風や地球流体力学における渦の研究においては，このうち単位質量あたりの鉛直方向の成分のみを指して（すなわちスカラー量として），絶対角運動量を定義することが多いので，本解説でもそれにならう．

$$M \equiv \frac{1}{2} f r^2 + r\overline{v} \tag{2.14}$$

角運動量の定義は，軸からの距離×速度の回転成分だから，第 2 項が渦自身の回転成分に伴う角運動量として出てくるのは容易に理解できるだろう．第 1 項は惑星渦度に伴う角運動量である．図 2.3 に示すように，f 平面で考えると，系の回転速度は $f/2$ となる (自信がなければ，渦度の定義が $\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ であることから再確認)．惑星渦度に伴う流体粒子の速度の回転成分は $fr/2$ となる．したがって，これに中心軸からの距離 r を掛けることにより，惑星渦度に伴う角運動量が $fr^2/2$ となることが確認できる．

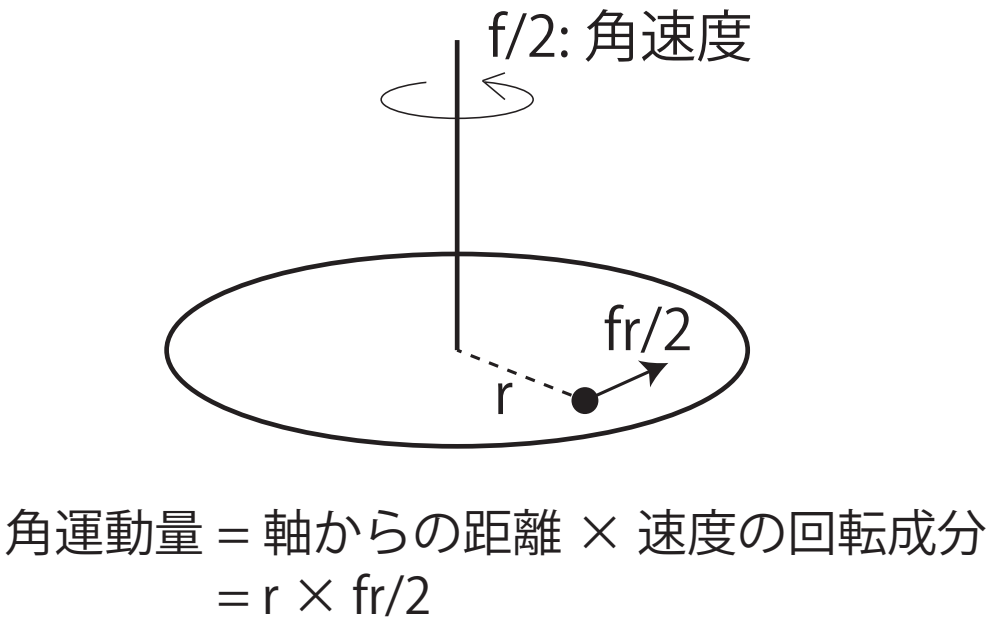

図 2.3: 惑星渦度に伴う角運動量．

運動方程式 (1.35) の両辺に r をかけ，動径風 u の定義が Dr/Dt であったことを思い出すと，以下の式が成り立つことが分かる[3)]．

$$\frac{dM}{dt} = rF_v \tag{2.15}$$

この式からわかるように，摩擦と乱流拡散がない状態においては，絶対角運動量は流体粒子について保存する．また，絶対角運動量の物質微分は，摩擦や乱流拡散が及ぼすトルクであるということも分かる．大気境界層付近では，値が小さくなる．また，定常状態で摩擦が無い場合を考えると，移流項と拡散項が釣り合っていることも分かる．

例えば，仮にコリオリパラメータ $f = 5.0 \times 10^{-5}(s^{-1})$（北緯約 20° に相当）という状況を考えよう．$r = 300$ km にあった接線風速 0 の空気塊が，摩擦の影響なく，$r = 50$ km に達したとすると，絶対角運動量保存の法則から，

$$M = 2.5 \times 10^{-5} \times \left(3.0 \times 10^5\right)^2 = v \times \left(5.0 \times 10^4\right)^2 + 2.5 \times 10^{-5} \times \left(5.0 \times 10^4\right)^2 \tag{2.16}$$

で，風速 $v = 43.8$ m s^{-1} となる．現実には摩擦があるため，これほどの値にはならないが，十分に強風が吹くことの説明になっていることは分かるだろう．逆にいうと，赤道付近では f が小さく，空気塊がある地点に向かって吹きこんできたとしても，これほどの風速になるのは難しい．

絶対角運動量を用いて，傾度風平衡を表すこともできる．この場合には，以下のようになる．

$$\frac{M^2}{r^3} - \frac{1}{4}f^2 r \simeq \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} \tag{2.17}$$

[3)] 接線方向の微分も含めた式は，Kepert(2001) を参照．

また，絶対渦度ベクトルが等絶対角運動量面に平行となることを示しておこう．等絶対角運動量面の勾配は

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r}, \frac{\partial M}{\partial \phi}, \frac{\partial M}{\partial z}\right) = \left(fr + \overline{v} + r\frac{\partial \overline{v}}{\partial r}, 0, r\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right) \tag{2.18}$$

であり，これと (B.6) との内積を考えるとゼロになる．すなわち，等絶対角運動量面は，絶対渦度ベクトルに平行である．

さて，最大風速半径の近傍にある等絶対角運動量線面は上空に向かって傾いていき，アウトフロー域ではほとんど水平方向を向いている．このことを説明するためにについて，以下のような全微分を考える．

$$\delta M = \left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_z \delta r + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)_r \delta z \tag{2.19}$$

ここで，$\delta M = 0$，すなわち絶対角運動量を一定とした面を考えると，

$$0 = \left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_z + \left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)_r \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_M \tag{2.20}$$

が得られる．右辺に現れた $(\partial z/\partial r)_M$ は等絶対角運動量面の傾きを表している．絶対角運動量の定義を考えると，

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_M = -\left(f + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) / \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{f + \zeta}{-\partial v/\partial z} \tag{2.21}$$

という式が得られる．右辺の分母にある $(-\partial v/\partial z)$ は接線風速の鉛直勾配に関連した項であるが，温度風関係を考えると水平温度傾度が大きいほど値が大きくなる．台風中の自由大気下層と暖気核がある対流圏上層を比較すると，上層では，水平温度傾度が大きく絶対渦度が弱くなっている（接線風速が弱くなっている）ことから，等絶対角運動量面は外側に向かって傾斜することになる．

もし，絶対角運動量がラグランジュ的な保存量であるとしてよいならば，このことは空気塊のトラジェクトリが上に行く従って徐々に外側に向かっていくことを意味している．眼の壁雲も上空に向かうにつれて徐々に水平方向をむくようなコヒーレントな構造をしているが，図 2.4(a) に示すように，Bryan and Rotunno (2009c) による非静力学軸対称台風モデルを用いた結果では，パーセルは絶対角運動量の等値線にほぼ沿う形で壁雲の内部を上昇していく．非静力学３次元モデル NHM を用いた数値計算結果を行った Sawada and Iwasaki (2007) は，氷晶過程を含む数値実験 (control) と氷晶過程を含まない数値実験 (warm) を行っているが，いずれの実験においても，壁雲に対応する上昇流の強い領域が等絶対角運動量線に沿った構造を示している．

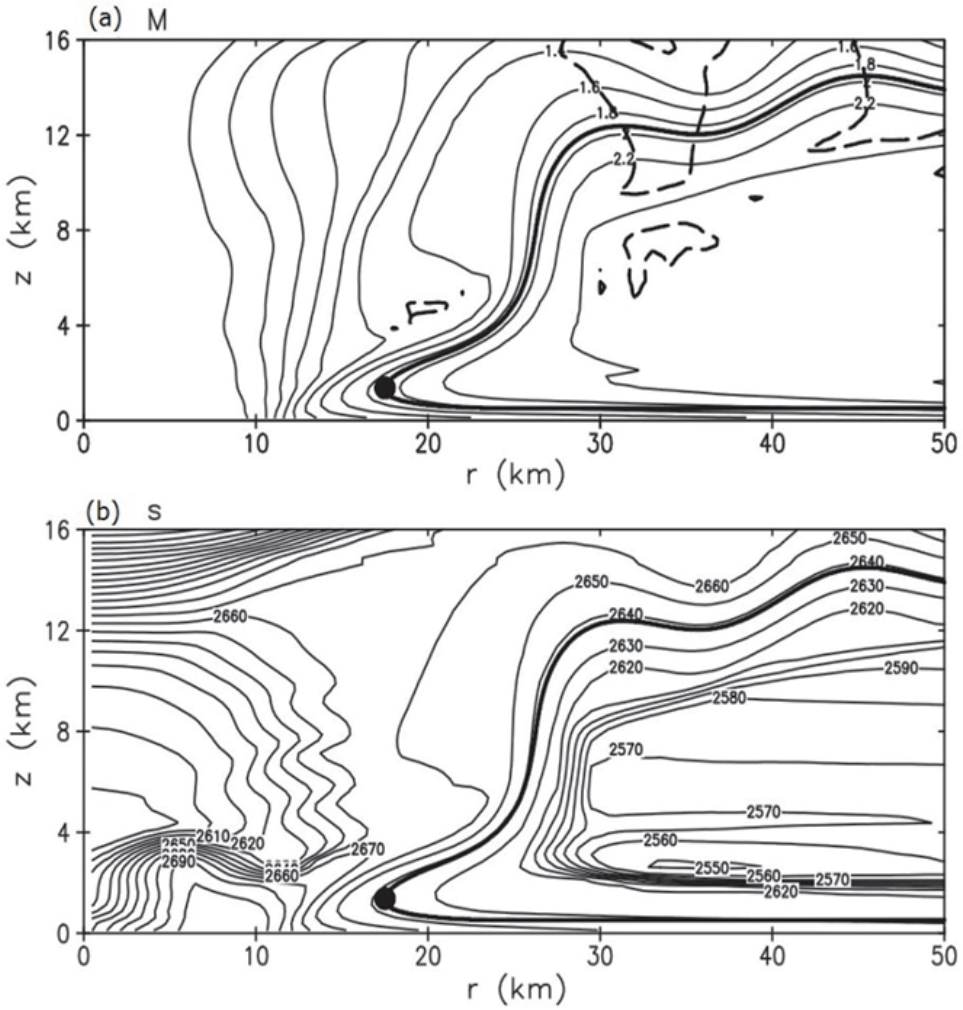

図 2.4: 軸対称台風モデルを用いて計算される (a) 絶対角運動量 (b) 湿潤エントロピー (Bryan and Rotunno (2009c) を改変したもの).

2.4.2 熱力学的保存量

ここまで，理想化実験の結果において，絶対角運動量が自由大気中でラグランジュ的な保存量となっていることを説明したが，熱力学的な物理量もラグランジュ的保存量となることが考えられる．相当温位や湿潤比エントロピーには空気塊が経る過程や導出の際に用いる近似に応じていくつかの種類がある (Bryan, 2008) が，偽断熱過程（凝結が起きた場合に液体の水が空気塊から全て取り去られるという過程）を想定し，氷物質を考えないとするならば，Bryan (2008) が提案した以下のような湿潤比エントロピー s がほぼ完全な保存量となる．

$$Tds = C_p dT + L_0 dq_v - \alpha_d dp \tag{2.22}$$

ここで，T は気温，C_p は比熱，L_0 は単位質量あたりの水蒸気凝結に伴って発せられる熱量を表す

定数 (2.555×10^6 J kg^{-1})，q_v は水蒸気混合比，α_d は乾燥気体の比容，p は気圧を表している．なお，湿潤比エントロピー s と相当温位 θ_e の関係は $s = C_p \log \theta_e$ で表され，比熱を定数と見なせば等価となるため，この s に対応する相当温位 θ_e も自然に定義される Bryan (2008)．図 2.4(b) に，さきほどと同じ軸対称モデルを用いた計算結果として，湿潤比エントロピー s の分布を示す．図から，空気塊のトラジェクトリは等角運動量線だけでなく，等湿潤比エントロピー線にも沿っていることがわかる．すなわち，壁雲の中を上昇する空気塊について，s（及び等価な相当温位）もラグランジュ的な保存量として扱えるということがわかる．この 2 つの物理量の等値線が平行であるということは，実は，単に両方の物理量がラグランジュ的な保存量であるということ以上に，傾斜湿潤対流不安定及び湿潤渦位という物理量に関連しているので，3.1.2 節で説明を加える．

2.5　軸対称的な台風の基本場

ここまで，軸対称的な台風における物理量がどのように関連付けられるのかについて述べてきたことを簡単にまとめておこう．台風という渦は，地衡風平衡よりも傾度風平衡に近く，温度風関係を考えると，台風の中心付近の上空にある暖気核の存在は，上空に行くほど弱くなるという接線風の分布と整合的である．また，ソーヤー・エリアッセンの方程式を考えることによって，壁雲域での非断熱加熱が，壁雲域での上昇流・中心付近での下降流・外部領域での下降流・壁雲に向かう吹込み，といった台風中の二次循環の特徴と密接に関係していることがわかる．さらに，壁雲近傍における準保存量として，絶対角運動量及び相対温位を挙げることができる．

第3章　軸対称的な台風の構造 II: 摂動と不安定

3.1　Sawyer-Eliassen の方程式

十分に発達した台風の内部コア付近では，境界層領域を除き，おおむね傾度風平衡と静水圧平衡の近傍で準定常状態が形成されているか，ゆっくりと軸対称的な構造が変化すると仮定できることを示してきた．このような近似が成り立つ場合には，熱や運動量のソース項に対して，どのような二次循環が応答として現れるか推論する式 (Sawyer-Eliasse の方程式[1]) を導出することができる．

質量は非発散の物理量であるから，$r-z$ 平面において質量流線関数を定義することができる (Hack and Schubert, 1983)．

$$\psi \equiv -r\int_0^z \overline{\rho} u dz \tag{3.1}$$

このようにして定義された質量流線関数は，u や w と以下のような関係にある．

$$u = -\frac{1}{r\overline{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial z},\ w = \frac{1}{r\overline{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{3.2}$$

熱力学の第一法則と温度-風の関係式に，式 (3.2) を組み合わせると，以下のような式が導出される[2]．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r\overline{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{B}{r\overline{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{r\overline{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{B}{r\overline{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\\ = -\frac{\partial(f+2\overline{v}/r)F_v}{\partial z}+\frac{g}{C_p\overline{T}}\frac{\partial Q}{\partial r}\end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで，A, B, C は以下の式で表される物理量である．

$$A \equiv N^2,\ \text{成層安定度} \tag{3.4}$$

[1] もともとは地衡風平衡について導かれた方程式である．

[2] 厳密には，先に説明したように，温度-風関係は鉛直座標が p の場合に成り立つため，ここでの z は $z=-H_0\log(p/p_0)$ を使って定義される「偽高度」であると読み替えて欲しい．幾何高度 (つまり，通常の z 座標) を用いた Sawyer-Eliassen の方程式は Penderglass and Willoughby (2009) に記載がある．

$$B \equiv -\left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right)\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\overline{\theta}}\frac{\partial \theta}{\partial r},\ \text{傾圧性} \tag{3.5}$$

$$C \equiv \left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right)\left(f + \frac{\overline{v}}{r} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial r}\right)(= I^2),\ \text{慣性安定度} \tag{3.6}$$

つまり，非断熱加熱や運動量のトルクに対する二次循環の応答は，式 (3.3) のような二階偏微分方程式で表される．この式を Sawyer-Eliassen の方程式という．この式の意味するところを理解するために，順圧大気 ($B = 0$) とし，運動量のソース項はなく，熱源 (Q) のみが与えられたとする[3)]．

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r\rho_0}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{r\rho_0}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \frac{g}{C_p T_0}\frac{\partial Q}{\partial r} \tag{3.7}$$

この方程式は，有界領域を考える場合には境界値問題として解くことができる．数値的には，緩和法などの方法で解が得られる．よく似た例としては，電荷を置いたときに形成される電位場が挙げられる．右辺に現れる熱源 Q の r 微分は，熱源を挟んで正負の対を形成する (式 3.1) ので，このときは，電気双極子（正負の電荷の対）をおくことと数学的には似ており，図に実線で示したような二次循環が得られることになる．まだ眼のできていない台風の中心付近における非断熱加熱と，下層での収束・上層での発散とが互いに整合的な存在であるということを意味している．

もうひとつ注目すべきことは，大まかに言って，A と C の入った項を比較することにより，二次循環の典型的なアスペクト比が決まるという点である．流体の厚さを H とすると，水平方向のスケールは NH/I になる．このことを直観的に解釈するならば，N が鉛直方向の運動を規定する物理量であるのに対して，I が水平方向の運動を規定する物理量であるということを意味する．慣性安定度 I は，絶対渦度が著しく大きい内部コア領域で大きな値をとり，中心から外側に行くに従って値が小さくなっていく．眼が出来上がった台風の壁雲域における加熱を考えれば，壁雲より内側では二次循環のスケールが小さく，外側ではスケールが大きいことと対応している（本当は，I は r に依存しているので，この節の内容はもう少し緻密な議論が必要だが）．

傾圧性を考えた場合や，点源として運動量のソースが与えられた場合の応答について，図 3.2 に示す．熱源が与えられたときに傾圧性が存在する場合には，二次循環の主軸が鉛直ではない方向を向くことや，運動量のソースが与えられたときには，その z 微分が二次循環の分布に対応していることに注目すべきである．

3.1.1 慣性安定度

定常軸対称な解が存在するということと，実際にそのような渦が安定的に存在しうるということは同じではない．解にある微小な擾乱を与えてそれが増幅するのであれば，その渦は安定的には存在できないと考えられる．ここでは，まず，慣性安定度の意味と慣性不安定について述べたあと，斜向不安定（対称不安定や傾斜不安定とも）についても触れる．渦ロスビー波については，4.2 節で述べる．

[3)] ここでは簡単のため $B = 0$ としている．現実的な台風は，中心上空に暖気核があるため傾圧構造となっている．

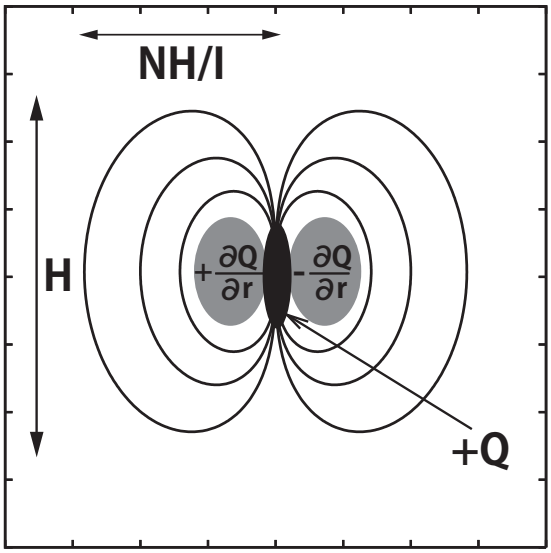

図 3.1: 順圧場において熱源 Q が与えられたとした場合の二次循環の分布．ただし，図中の領域で I は一様としているので，現実の台風との違いがあることに注意．

慣性安定度とは，渦が存在するときに微小な変位によってもとの渦の構造が崩壊するかどうかの指標となる値である．慣性不安定は，成層不安定に類似した構造を持つものとして特徴づけられ，単純に言えば，絶対角運動量が渦の外側で内側よりも小さくなっていることに起因する．いま，水平流が卓越しているとして，パーセル法を用いて議論を展開することにしよう．

式 (1.35),(1.34) において，基本場が傾度風平衡の条件を満たし，気圧の変位を無視して，水平方向に変位が起きるものと仮定すると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial r}+\overline{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)u'+\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}u'-\left(f+\frac{2\overline{v}}{r}\right)v'=0 \tag{3.8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial r}+\overline{w}\frac{\partial}{\partial z}\right)v'+\left(f+\frac{\overline{v}}{r}+\frac{\partial\overline{v}}{\partial r}\right)u'+\frac{\overline{u}}{r}v'=0 \tag{3.9}$$

ここで，基本場に乗った場合のラグランジュ微分

$$\frac{d_I}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial}{\partial r}+\overline{w}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.10}$$

円筒座標系で定義される相対渦度が

$$\zeta\equiv\frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r} \tag{3.11}$$

であることに注意する．

まずは，簡単のため $\overline{u}=\overline{w}=0$ であるとして，議論を進めてみよう．すると，

$$\frac{d_I^2}{dt^2}u'+\left(f+\overline{\zeta}\right)\left(f+\frac{2\overline{v}}{r}\right)u'=0 \tag{3.12}$$

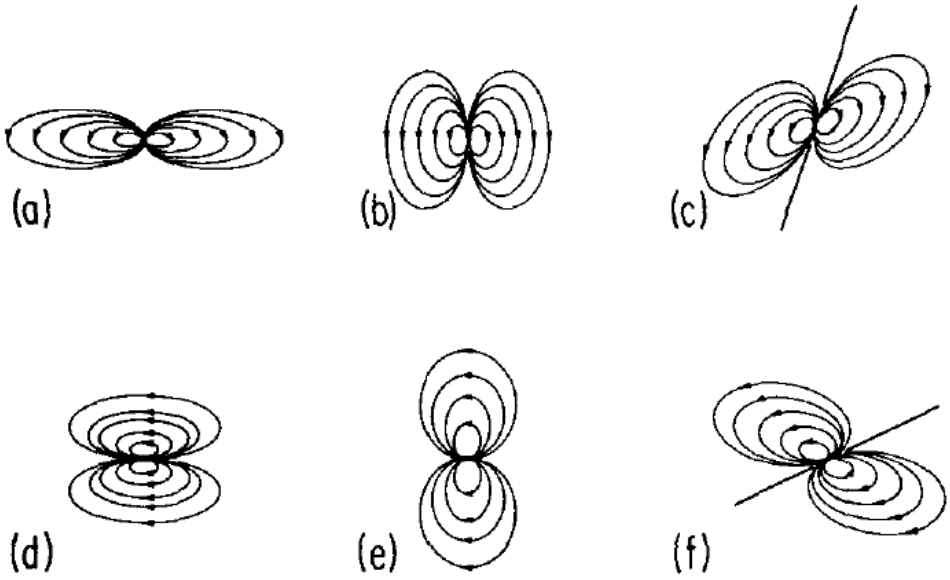

図 3.2: 慣性安定度 I が一定の場合のポイントソースに対する流線関数の応答：(a) 順圧大気中の I が小さい場合の Q に対する応答 (b) 順圧大気中の I が大きい場合の Q に対する応答 (c) 傾圧大気中の Q に対する応答 (d) 順圧大気中の I が小さい場合の F_v に対する応答 (e) 順圧大気中の I が大きい場合の F_v に対する応答 (f) 傾圧大気中の F_v に対する応答 (Shapiro and Willoughby, 1982)

という式が得られる．この式の意味するところは，成層不安定の式と同様，水平方向の変位に対して基本場が安定であるかどうかを表している．以下のような慣性安定度 I と呼ばれる値を定義すると，

$$I^2 \equiv \left(f + \overline{\zeta}\right)\left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right) \tag{3.13}$$

式 (3.10) は，より簡単に書くことができる．また，

$$\frac{d_I^2}{dt^2}u' + I^2 u' = 0 \tag{3.14}$$

この式の意味するところを考えよう．もし，２項目の u' の係数が負であるならば，水平方向の摂動は拡大する．これを慣性不安定と呼ぶ．台風の内部コア領域では，渦度が非常に大きいので，非常に安定であり，振動の周期も非常に短い．

接線風の摂動 v' 及び解は容易に得られて以下の通りである．

$$\frac{d_I^2}{dt^2}v' + I^2 v' = 0 \tag{3.15}$$

$$(u', v') = \begin{cases} A\exp(iIt) + B\exp(-iIt), \text{ for } I^2 > 0, \\ C\exp(It) + D\exp(-It), \text{ for } I^2 < 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

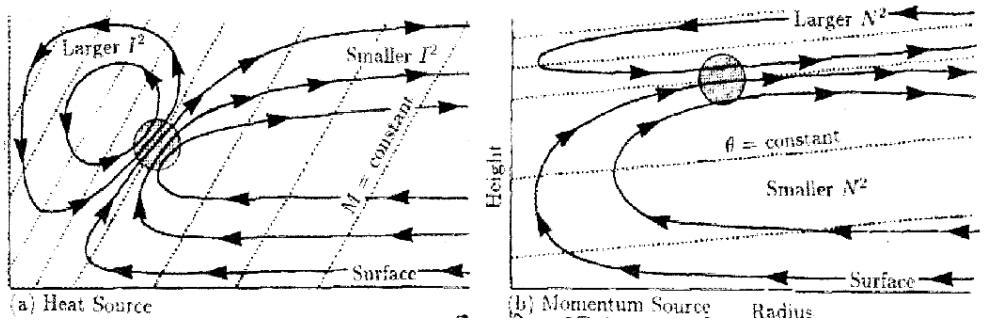

図 3.3: 流線関数の応答：(a) 加熱がソース項として与えられた場合 (b) 運動量がソース項として与えられた場合．(Willoughby, 1995)

この式から，慣性安定な状態においては，水平運動の（この場合は傾度風に対する）摂動の振動解が得られ，I の大きさが動径風の振動の時間スケールを決定する．また，不安定な場合には，擾乱が指数的に大きくなることが分かる．

また，慣性安定度は，絶対角運動量と以下の関係式にあることにも注目したい，

$$I^2 = \frac{1}{r^3}\frac{\partial M^2}{\partial r} \tag{3.17}$$

テイラーの実験と同様，ここで示した慣性不安定は，絶対角運動量の絶対値が内側より外側で小さい場合に不安定が生じることがわかる．このことは，直観的にいえば,「軸対称回転している流体の微小部分をドーナツ状に軸対称性を保ったままその半径を少し増やしてみる．その際，絶対角運動量は保存される．ずらした位置で働く遠心力が，その位置でまわりの場がそもそも作っていた圧力勾配に比べて大きければ，ドーナツ状の微小部分は外向きに放り出されるわけである」林 (1996)(71 頁)

現実の台風における慣性安定度のコンポジット解析の結果を図 3.4 に示す．台風の中心付近では，I^2 が f^2 の 1000 倍以上に達しているが，これは，慣性振動の時間スケールが 1 時間以内となることを意味している．

参考のため，基本場の $\overline{u}$ と $\overline{w}$ を残したまま，計算を進めてみる（w' については考えていないことに注意）．この計算は，定常状態を基本場として，そこに，擾乱が加えられたときに，それがどのように振る舞うのかを考える上で基礎となる（が，結果は先ほどとそれほど変わらない）．

$$\frac{d_I}{dt}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial\overline{u}/\partial r & f + 2\overline{v}/r \\ -f - \overline{v}/r - \partial\overline{v}/\partial r & -\overline{u}/r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

となる．計算は付録に譲るとして，結果だけを示すと，先に得た方程式における振動数は，

$$\left(f + \frac{\overline{v}}{r} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial r}\right)\left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial r} - \frac{\overline{u}}{r}\right) \tag{3.19}$$

$$= I^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial r} - \frac{\overline{u}}{r}\right) \tag{3.20}$$

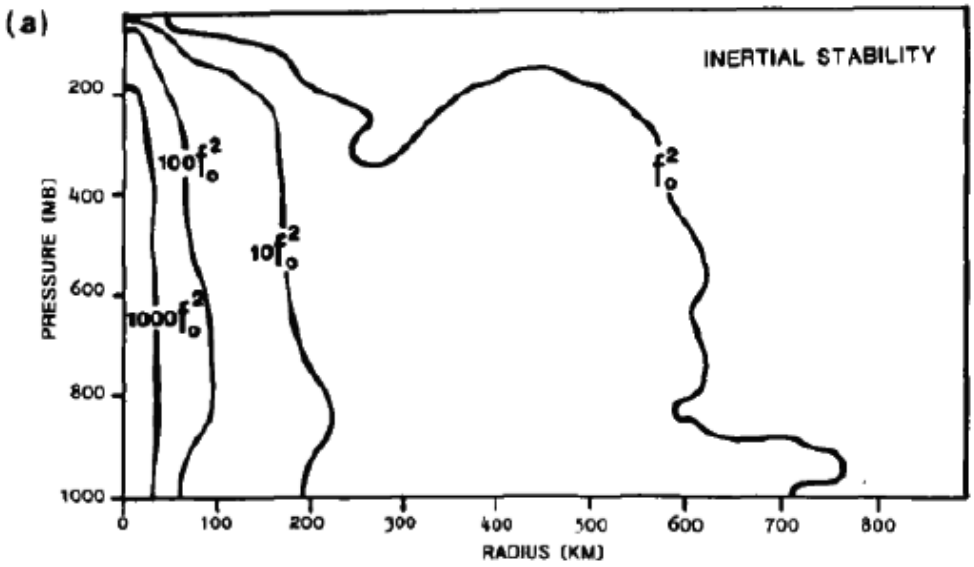

図 3.4: コンポジット解析による台風中の慣性安定度 (Holland and Merrill, 1984).

となることが分かる．主要項は第 1 項であり第 2 項の影響はほとんどないが，$\overline{u}$ があることで，わずかながら振動周期が変化していることがわかる．

ここまで，慣性振動と慣性不安定を例にとって，傾度風平衡の近傍にある場合の渦にとって，f の代わりに I が重要なパラメータとなっていることを説明してきたが，ロスビーの変形半径や境界層の厚さなどにとってもこれらの値が特徴的な役割を果たす．詳しくは，ほかの章で述べるところもあるが，表にまとめておく (3.5).

3.1.2 斜向不安定*

純粋な鉛直方向へのパーセルの変位に伴う直立不安定は静的安定度に関連し，純粋な水平方向へのパーセルの変位に伴う慣性不安定は慣性安定度に関連していた．しかし，パーセルの斜向に対しては別に考える必要があり，両方に対して安定であっても，パーセルの斜向に伴って不安定となる可能性がある．この種の不安定を指して斜向不安定（もしくは対称不安定）と呼ぶ.

デカルト座標系における乾燥大気中の対称不安定については，小倉 (1997) に式の導出が掲載されている．Ri をリチャードソン数として，結果だけを記すことにすると，

$$\frac{(\delta z/\delta y)_{\overline{M}}}{(\delta z/\delta y)_{\overline{\theta}}} = \frac{\overline{\zeta}}{f} Ri \tag{3.21}$$

の大きさが 1 より小さいならば対称不安定，1 に等しいならば中立，1 よりも大きいならば不安定ではない，ということができる．第 1 項目は,「背景場の等絶対角運動量面の傾き」と「背景場の等温位面の傾き」との比と解釈することができる．軸対称な渦システムにおいても基本的には同様の結果が

基本場	地衡風平衡	傾度風平衡
慣性安定度	f^2	I^2
慣性周期	$2\pi / f$	$2\pi / I$
慣性円の半径	$\lvert V \rvert / f$	$\lvert V \rvert / I$
ロスビーの変形半径	$\sqrt{gH} / f$	$\sqrt{gH} / I$
慣性重力波の位相速度	$\sqrt{gH + (f/k)^2}$	$\sqrt{gH + (I/k)^2}$
境界層の厚さのスケール	$\sqrt{2K / f}$	$\sqrt{2K / I}$

図 3.5: 場が地衡風平衡の近傍にある場合と傾度風平衡の近傍にある場合.

得られ，パーセルの斜向に伴う中立の条件は等絶対角運動量面と等（飽和）相当温位面とが平行になることと言い換えられる (Schecter and Montgomery, 2007).

また,

$$\overline{q} = \left(f - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} - f\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial g}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2 \tag{3.22}$$

で基本状態の渦位を定義すると対称不安定の条件は,

$$\overline{q} < 0 \tag{3.23}$$

と同じであるということも分かる.

3.2 軸対称渦における調節過程*

傾度風平衡にあった台風ライクな渦の最大風速が変化したときに，中心気圧が如何にしてそれに調節されるかについて議論する．基本的にここで示す導出の過程は，Schubert et al. (1980) が基本場を静止状態として行った解析と同じである[4)].

簡単のため，基本場の動径風速 u と鉛直風速 w については，$\overline{u} = \overline{w} = 0$ であるとし（$\overline{\cdot}$ は基本場を意味する），浅水方程式系を用いて議論を進める．擾乱が起こっていないときの流体層の厚さを H（一定）として，底面は動かないものとし，その自由表面の偏差 η に注目する．系が軸対称であり，凝結加熱や摩擦・粘性がないとして，円筒座標系で方程式を書き下すと，以下の通りとなる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} - \left(f + \frac{v}{r}\right)v = -g\frac{\partial \eta}{\partial r} \tag{3.24}$$

[4)] Schubert et al. (1980) は，基本場が静止状態でない傾度風渦である場合の，十分時間がたった状態については示している.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + \left(f + \frac{v}{r}\right)u = 0 \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial r} + H\frac{1}{r}\frac{\partial ru}{\partial r} = 0 \tag{3.26}$$

偏差成分 u', v', η' について考えると，以下のような式となる．

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right)v' = -g\frac{\partial \eta'}{\partial r} \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \left(f + \frac{\overline{v}}{r} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial r}\right)u' = 0 \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + H\frac{1}{r}\frac{\partial ru'}{\partial r} = 0 \tag{3.29}$$

ここで，基本場の接線風速について，中心で接線風速が 0 で，かつ，渦が剛体回転していること，すなわち，

$$\frac{\overline{v}}{r} = \frac{\partial \overline{v}}{\partial r} = \frac{1}{2}\overline{\zeta}_a = \text{const.} \tag{3.30}$$

を仮定すると，

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \left(f + \overline{\zeta}_a\right)v' = -g\frac{\partial \eta'}{\partial r} \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \left(f + \overline{\zeta}_a\right)u' = 0 \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + H\frac{1}{r}\frac{\partial ru'}{\partial r} = 0 \tag{3.33}$$

となる．実は，単位時間を $1/(f+\overline{\zeta}_a)$ とし，水平方向の距離のスケールを $c/(f+\overline{\zeta}_a)$(c は重力波の位相速度) とすれば，Schubert et al. (1980) が基本場を静止状態として，単位時間を $1/f$ とし，水平方向の距離のスケールを c/f としたときに得たのと同じ方程式系であり，同じ形の解が得られる．このことは，基本場が静止状態であるときと剛体回転の状態にあるときの違いが，惑星渦度と絶対渦度の違いとなって表れたことを意味している．

このままでは，容易に解が得られないので，Schubert et al. (1980) と同様に，以下の式で定義されるハンケル変換によって，(u, v, η) に積分変換を施す（ハンケル関数についての説明は，付録 C.4 を参照のこと）．

$$\psi = \int_0^\infty \hat{\psi}(k,t)J_\nu(kr)kdk \tag{3.34}$$

ここで，J_ν は次数が ν の第一種ベッセル関数であることを意味する．式 (3.31) と式 (3.32) については次数が 1 のハンケル変換を適用し，式 (3.33) については次数が 0 のハンケル変換を適用すると，以下の連立常微分方程式系が得られる．

$$\frac{d\hat{u}}{dt} - \left(f + \overline{\zeta}_a\right)\hat{v} - gk\hat{\eta} = 0 \tag{3.35}$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} + \left(f + \overline{\zeta}_a\right)\hat{u} = 0 \tag{3.36}$$

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt} + Hk\hat{u} = 0 \tag{3.37}$$

初期条件を $\hat{u} = \hat{u}_0$，$\hat{v} = \hat{v}_0$，$\hat{\eta} = \hat{\eta}_0$ として，この連立常微分方程式系を解くと，

$$\hat{u} = \frac{1}{\mu^2}\left\{\left(\mu\hat{v}_0 + \frac{gk}{f+\overline{\zeta}_a}\mu\hat{\eta}_0\right)\sin\omega t + \mu^2\hat{u}_0\cos\omega t\right\} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\hat{v} = \frac{1}{\mu^2}&\left\{-\mu\hat{u}_0\sin\omega t + \left(\frac{gk}{f+\overline{\zeta}_a}\hat{\eta}_0 + \hat{v}_0\right)\cos\omega t\right\}\\ &+\frac{1}{\mu^2}\left\{-\frac{gk}{f+\overline{\zeta}_a}\hat{\eta}_0 + \frac{gHk^2}{(f+\overline{\zeta}_a)^2}\hat{v}_0\right\}\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\hat{\eta} = \frac{1}{\mu^2}&\left\{-\frac{Hk\mu\hat{u}_0}{f+\overline{\zeta}_a}\sin\omega t + \left(\frac{Hk^2g\hat{\eta}_0}{(f+\overline{\zeta}_a)^2} + \frac{Hk\hat{v}_0}{f+\overline{\zeta}_a}\right)\cos\omega t\right\}\\ &+\frac{1}{\mu^2}\left(\hat{\eta}_0 - \frac{Hk}{f+\overline{\zeta}_a}\hat{v}_0\right)\end{aligned} \tag{3.40}$$

ここで，$\mu = \sqrt{1 + gHk^2/(f+\overline{\zeta}_a)^2}$ であり，$\omega = \mu(f+\overline{\zeta}_a)$ である．この式でまず注目されるのは，$\hat{u}$ には振動成分しかなく，$\hat{\eta}$ と $\hat{v}$ の振動成分以外の部分は $\hat{u}_0$ から影響を受けないという点である．すなわち，最終状態としては，$\hat{v}$ と $\hat{\eta}$ の間でバランスが形成されることになる．

そして，通常の地衡流調節に似た議論として，摂動の空間スケールが，$\sqrt{gH}/I$ に比べて小さいときには風速場の変化が温度や気圧に関連する質量場の変化を支配するのに対し，$\sqrt{gH}/I$ より大きいときには質量場の変化が風速場の変化を支配することもこの式から示される．すなわち，擾乱の空間スケール l が小さい (k が大きい) ときには，

$$\hat{v} = \hat{v}_0 \text{ and } \hat{\eta} = \sqrt{\frac{H}{g}}\hat{v}_0, \text{ if } l = 1/k \ll \frac{\sqrt{gH}}{I} \tag{3.41}$$

となり，$\hat{v}$ も $\hat{\eta}$ も最終状態が $\hat{v}_0$ で決まることがわかる．すなわち，風速場の摂動が質量場の最終状態を決定することになる (改めて，$\hat{v}_0$ と $\hat{\eta}_0$ が，剛体回転を基本場としたときに加わった，風速と質量の摂動であることを確認しておこう)．逆に擾乱の空間スケール l が大きい (k が小さい) ときには，

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{g}{H}}\hat{\eta}_0 \text{ and } \hat{\eta} = \hat{\eta}_0, \text{ if } l = 1/k \gg \frac{\sqrt{gH}}{I} \tag{3.42}$$

となって，質量場の摂動が風速場の最終状態を決定することになる．擾乱の空間スケール l が $\sqrt{gH}/I$ に等しいときには，

$$\hat{v} = \frac{1}{2}\left(\hat{v}_0 + \hat{v}_\eta\right) \text{ and } \hat{\eta} = \frac{1}{2}\left(\hat{\eta}_0 + \hat{\eta}_v\right), \text{ if } l = 1/k = \frac{\sqrt{gH}}{I} \tag{3.43}$$

である．ただし，$\hat{v}_\eta = \sqrt{g/H}\hat{\eta}_0$ であり，$\hat{\eta}_v = \sqrt{H/g}\hat{v}_0$ である．ここで現れた $\frac{\sqrt{gH}}{I}$ は基本場が剛体回転の場合の浅水系におけるロスビーの変形半径である．準地衡的な枠組みにおいては $\frac{\sqrt{gH}}{f}$ だったので，コリオリパラメータが慣性安定度に置き換わっていることに注目しよう．

さて，台風の内部コアを考えたときには，空間スケールとして，最大風速域や台風の眼の領域のようなシャープな構造が注目される．系統的な研究は筆者の知る限りまだないように思うが，ここで示したロスビーの変形半径は内部コア全体のスケールに比べると大きい場合が多い (Wu et al., 2006)．つまり，内部コアダイナミクスを考える上では，風速場が質量場を主にコントロールしており，暖気核の強化や中心気圧の低下は受動的なものであると言える．Ito et al. (2011) は，準定常状態の軸対称的な台風においては，内部コアのシャープな風速構造は，中心付近の気圧場や温度場に影響をほとんど受けず，非断熱加熱によって対流活動が活発になることが運動学的に風速場を駆動していることを示している．

第4章　渦力学としての側面

4.1　渦度方程式と渦位方程式

台風は，大きな「渦」であると認識しているであろう．前章でも渦度という単語は既に出てきているが，本章では渦度や渦位についてより深く学び，台風のいくつかの構造上の特徴が説明されることを述べる．まずは，渦度方程式，循環，渦位方程式といった基礎的な用語の整理から始める．

4.1.1　渦度方程式

絶対渦度ベクトルは一般の座標系で次のように定義される[1)]．

$$\boldsymbol{\zeta_a} = \boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \boldsymbol{V} \tag{4.1}$$

渦度について，ベクトル形式の運動方程式をベースに考えることにする．

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla + \boldsymbol{F} \tag{4.2}$$

ここで，$\boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V}$ はベクトル不変形ではないので，このまま，$\nabla\times$ を作用させることで単純な結果は得られないが，$\boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} = \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V}\right) - \boldsymbol{V} \times (\nabla \times \boldsymbol{V})$ が成り立つことに着目すればベクトル不変形の式として計算することができる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}_a}{\partial t} &= \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\zeta_a}) + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p + \nabla \times \boldsymbol{F} && (4.3)\\
&= (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\zeta}_a + \boldsymbol{\zeta}_a(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - (\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{V} \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p + \nabla \times \boldsymbol{F} && (4.4)
\end{aligned}$$

ここで，注目すべきは渦度は移流の効果だけではなく，$\boldsymbol{\zeta}_a(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - (\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{V}$ で表される変形を受けるということである．すなわち，渦度は単純な保存法則の形に書けない量である．簡単のため，直線直交座標系において，$\boldsymbol{\zeta}_a$ を z 軸方向に取り，その大きさを $\boldsymbol{\zeta}_a|_z$ とすると，渦度の成分はそれぞれ，$-\boldsymbol{\zeta}_a|_z\partial u/\partial z$,$-\boldsymbol{\zeta}_a|_z\partial v/\partial z$, $-\boldsymbol{\zeta}_a|_z(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y)$ となる．最初の二つは，渦度に x,y 方向の成分がな

[1)] $\nabla \times \boldsymbol{V}$ の z 成分は，先ほどまで出てきた $v/r + \partial v/\partial r$ である．

くとも，渦度ベクトルの軸の方向に風速のシアがあれば渦度成分が生成されることを示しており，起き上がり項 (tilting term) と呼ばれる．最後の一つは，流れの場に収束があれば渦度が集められ強められることを指し，収束項と呼ばれる．ちなみに，$(1/\rho^2)\nabla\rho\times\nabla p$ はソレノイド項と呼ばれる．

4.1.2 循環

渦度は台風を記述するのに便利な道具ではあるが，厳密な意味では保存する量ではないため，物理的な記述道具としては使い勝手が悪いこともある．代わりとなる物理量として，循環や渦位といった保存性のよい量を定義することができる．渦位は循環を微分系に直したものと捉えることができるので，まずは，循環から説明することにしよう．循環は，流体中に閉曲線 C をとったとき，C に沿った流体の速度 $\boldsymbol{u}$ の一周線積分として定義される．式で書くと，

$$\Gamma \equiv \oint_C \boldsymbol{u}\cdot\cdot d\boldsymbol{C} \tag{4.5}$$

である．ストークスの定理によると，これは C で囲まれる閉曲面 $\boldsymbol{S}$ を考えたとき，

$$\Gamma \equiv \int_A \boldsymbol{\zeta}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.6}$$

と書き換えることができる．慣性系から見た循環は $\boldsymbol{\zeta}_a$ を用いて，

$$\Gamma_a \equiv \int_A \boldsymbol{\zeta}_a\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.7}$$

と書いて全循環と呼ばれることがある[2)]．全循環の時間変化は，先ほど得られた式 (4.3) により，

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \int_A \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}\cdot d\boldsymbol{S} + \oint_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.8}$$

と書くことができる．そのため，ρ が p のみの関数で与えられる場合（すなわち，順圧の場合），あるいは，面 A の法線ベクトルが $\nabla\rho\times\nabla p$ と直交し，非保存力や粘性が働いていない場合には，全循環 Γ_a は流れに沿って保存する量となる（ケルビンの循環定理）．温位やエントロピー (大気を扱う場合には，$C_p\ln\theta$ となる) は p と ρ の関数として表されるので，このような物理量の等値面上において解析する場合には

$$\int_A \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.9}$$

となり，循環が性質がよい物理量となることがわかる．

[2)] 回転系から見た流体の速度を $\mathbf{u}$ と定義している．慣性系からみた流体の速度は $\mathbf{u}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x}$ である．

4.1.3 非断熱加熱の存在する場合の渦位方程式の導出

ここでは，面 A の法線ベクトルとなる物理量として p や ρ の関数として表される λ(温位やエントロピーなど）を取ることを考えよう．乾燥大気においては温位も流れに沿って保存する量であるから，非常に簡単な形で書くことができる．ただ，湿潤大気を扱う場合においては，温位は加熱の効果を受けるため，流れに沿って保存する量ではない．このことを踏まえて，λ が流れ場に対して保存量とならない場合でも適用可能な式を導出する．

まず，式 (4.7) において，微小な小領域を考える．

$$\int_A \boldsymbol{\zeta}_a \cdot d\boldsymbol{S} \sim \boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda \frac{\delta m}{\rho \delta\lambda} \tag{4.10}$$

ここで，δm, $\delta\lambda$, ρ はそれぞれ小領域の質量，面 λ と面 $\lambda+\delta\lambda$ の差，密度を表している．時間発展については，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\frac{\delta m}{\delta\lambda}\right) = \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3}\cdot\nabla\lambda\frac{\delta m}{\delta\lambda} + \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\frac{\nabla\lambda}{\rho}\frac{\delta m}{\delta\lambda} \tag{4.11}$$

δm で割ったのち，時間変化を考慮して変形していくと，

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\frac{1}{\delta\lambda}\right) && (4.12)\\
&= \frac{1}{\delta\lambda}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\right) + \frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\delta\lambda}\right) && (4.13)\\
&= \frac{1}{\delta\lambda}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\right) - \frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\frac{\delta\dot{\theta}}{\delta\lambda} && (4.14)\\
&= \frac{1}{\delta\lambda}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\right) - \frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\dot{\theta}}{\rho} && (4.15)
\end{aligned}$$

より正式には，渦度方程式と質量保存則とスカラー量 λ の恒等式から導くことが出来る．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\dot{\lambda}}{\rho}\right) &= \frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho} + \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^3}\cdot\nabla\lambda + \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\frac{\nabla\lambda}{\rho}\\
&= \frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\dot{\lambda}}{\rho} + \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\frac{\nabla\lambda}{\rho} && (4.16)
\end{aligned}$$

ここで，左辺に現れた

$$P \equiv \left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\lambda}{\rho}\right) \tag{4.17}$$

を渦位，もしくは，ポテンシャル渦度と呼ぶ．θ を λ としてとり，かつ，

$$\frac{1}{\theta_0}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{C_p T_0}\dot{Q} \tag{4.18}$$

が成り立つとすると，

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\theta\right)\\
&= \frac{1}{\rho}(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\nabla\theta + \frac{1}{\rho}\left[\boldsymbol{\zeta}_a \cdot \nabla\left(\frac{\theta_0\dot{Q}}{C_p T_0}\right)\right] && (4.19)
\end{aligned}$$

この式は，非断熱加熱が存在する場合の渦位の時間発展を表す方程式としてよく用いられる．フラックス形式で書くと，以下のようになる．

$$\frac{\partial \rho P}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho P \boldsymbol{V} - \frac{\theta_0 \dot{Q}}{C_p T_0} \boldsymbol{\zeta}_a - \boldsymbol{F} \times \nabla \theta \right] = 0 \tag{4.20}$$

4.1.4 渦位方程式の意味するところ

渦位を計算することの利点として，いくつかのことが挙げられる．一つには，式 (4.19) をみて分かる通り，摩擦・乱流拡散がなく，加熱がない場合には[3]，渦位は流れ場に沿って保存するため，ラグランジュ的な保存量として扱えるということである．もちろん，台風内部では，加熱や外力項を無視できるような状況は考えにくい．ただ，そのような場合であっても，渦度方程式と比べて，項の数は少なく，加熱とそれに対する応答が直接的に関連付けられており，理論的な考察には向いていると言える[4]．

さて，式 (4.19) のなかでは，壁雲の周辺域における主要な項は，凝結熱の鉛直微分に起因する項 $\partial(\dot{Q}/C_pT_0)/\partial z$ であるから，壁雲の上部に渦位のシンクができ，壁雲の下部にソースが形成される．上昇流によって，渦位は上部に運ばれる．下層の方が絶対渦度が大きいため，式 (4.19) より，下層での渦位の生成が上層での渦位の消滅よりも多くなると推測される．すなわち，壁雲などにおける加熱は鉛直積算量としてはソースとして振る舞うことになる．また，地表面・海面での摩擦項は渦位のシンクとなるほか，成層圏からの引きずり込みによって，渦位の正偏差が対流圏の上層に現れる．

4.2 台風中の波動・不安定 II: 渦ロスビー波

台風の眼の構造を真上から見てみると，眼と壁雲領域の近傍には，小さなスケールの明瞭な渦がみられることがある (図 4.1)．このように，台風スケールよりも小さなスケールの有限振幅擾乱は，しばしば単に「メソ渦」(Meso vorticities) と呼ばれる．一般的には，非対称な外部強制が卓越しているのでなければ，非軸対称的な構造の時間変化は，渦ロスビー波と呼ばれる大気波動の振るまいとして記述される．理想化された数値モデルを用いた渦ロスビー波の台風研究への適用例としては Mitsuta et al. (1987) の研究などが先駆的なものとしてあげられるが，1990 年代に入り，Guinn and Schubert (1993), Montgomery and Kallenbach (1997), Schubert et al. (1999) などが，台風の眼の多角形性，壁雲から延びるインナーレインバンド，台風強度，壁雲の崩壊現象への渦ロスビー波の寄与を指摘したことによって，多くの研究者の注目を浴びるようになった．このような渦ロスビー波の発達は，先ほど示した渦度方程式や渦位方程式を使って説明される．

[3] 厳密には，式 (4.19) の右辺がゼロとなる場合．

[4] ただし，加熱の gradient が同じ値であっても，渦度の絶対値が大きい場合にはその効果は大きく，渦度の絶対値が小さい場合にはその効果は小さいということに注意が必要である．

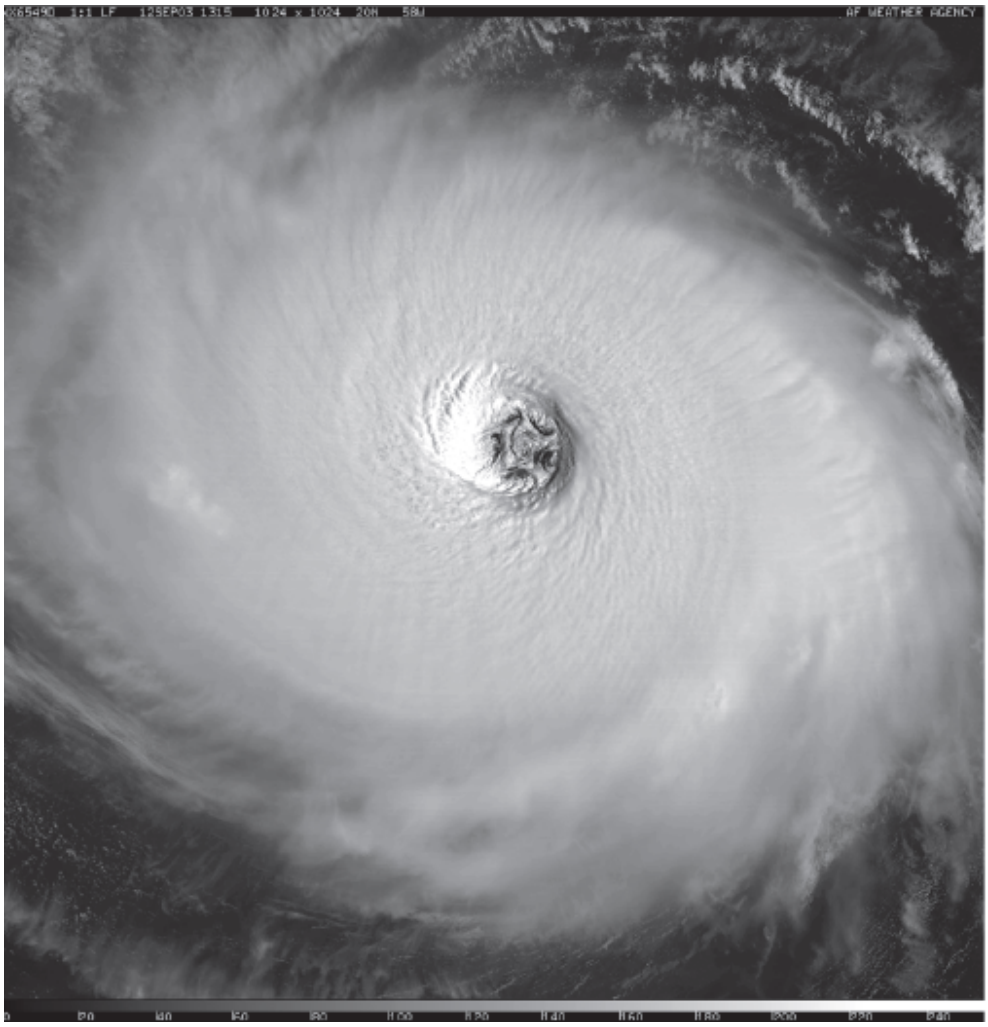

図 4.1: Hurricane Isabel(2003) における衛星画像 (Kossin and Schubert, 2004)．壁雲近傍に波数 5 の非軸対称な構造が見られる．

渦ロスビー波は,「ロスビー波」という名前の示す通り，背景場の渦位（順圧場では渦度と言い換えてもよい）の分布が鍵となる波動である．一般のロスビー波との大きな違いは，基本場が相対的に大きなスケールの渦（ここでは台風スケール）であるという点であり，擾乱成分は基本場の渦位の動径勾配に応じて伝播や発達の特徴が決まる．波動としての多くの特徴について惑星ロスビー波と渦ロスビー波との間にアナロジーが成り立つ．

また，基本場が渦の状態で発生するシア不安定に伴う擾乱，すなわち，渦ロスビー波の成長を考える上では渦位の勾配が決定的な役割を果たすため，渦ロスビー波に関する過去の研究では，渦位方程式が広く用いられている (e.g., (Montgomery and Kallenbach, 1997))．下層大気に関しては，Bell and Montgomery (2008) の観測があり，彼らの結果は．渦ロスビー波が存在する必要条件を満たしていることを示している．

4.2.1 渦ロスビー波の分散関係式

本節では，簡単のため，対流圏全体を一つの層とみなした順圧モデルを考える．このような単純化が現実大気における渦ロスビー波を理解するための第一歩となりうるのは，Ertel の渦位が，絶対渦度に成層安定度を加味したものであり，順圧場を考える上では渦度が渦位のアナロジーと言えるからである．非断熱加熱によって鉛直積算量として Ertel の渦位が生成されると述べたが，このことは，対流圏全体を一つの層とみなした順圧モデルを考えたときには，非断熱加熱領域において渦度のソースがあることに相当する．例えば，発達期の台風のように中心付近で非断熱加熱が顕著な場合 (例えば，Nguyen et al., 2011) の渦位分布は，図 4.2a のような順圧的な渦度場に相当する．また，壁雲における非断熱加熱が顕著な成熟期の台風の場合（例えば，Yau et al. (2004)）の渦位分布は，図 4.2b のような渦度場と対応させることができる．本稿では 3 次元空間における渦ロスビー波の基礎理論及び高度依存性については扱わないが，詳しくは，3 次元数値モデルを用いた渦ロスビー波に関する基礎研究である Möller and Montgomery (2000) や Kwon and Frank (2005) を参照いただきたい．

さて，基礎方程式として以下のような，非発散順圧大気モデル（＝相対渦度 ζ の移流方程式）を考える．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = \dot{q} \tag{4.21}$$

右辺の $\dot{q}$ は渦度のソースを表している．ここでは，軸対称性 $\partial/\partial\phi$ を仮定していないので，前節とは異なり相対渦度は，

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} \tag{4.22}$$

となっている．ここで，流線関数 ψ（渦度とは $\zeta = \nabla^2\psi$ の関係にある）以下のようにして定義する．

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}, v = \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{4.23}$$

流線関数について，擾乱 $\psi' = \psi'(r, \phi, t)$ が何らかの理由で生じたとして，線形化を施すことを考える．渦度擾乱のソースを新たに供給し続けるような強制を想定しない場合（外部強制の影響については Rozoff et al. (2009) の優れた研究がある），与えられた擾乱の振舞いについては次のような式が得られる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\Omega}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\nabla^2\psi' - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi'}{\partial \phi}\frac{d\overline{\zeta}}{dr} = 0 \tag{4.24}$$

という式が得られる．ここで，$\overline{\Omega} = \overline{v}/r$ は基本場の角速度を表している．この式が順圧場における渦ロスビー波の挙動を調べるための式として，基礎研究でよく用いられる式である (Montgomery and Kallenbach, 1997; Schubert et al., 1999)．

本稿では，この式を用いた基礎研究の結果について紹介する．まずは，Montgomery and Kallenbach (1997) に基づいて，順圧場における渦ロスビー波の分散関係式について述べる．彼らは，図 4.2a のような基本場を想定し，基本場の渦の典型的な水平スケールが渦ロスビー波として現れる擾乱の水平スケールよりも十分に大きいとして WKB 近似を施し，どのような解が得られるのかを調べた．導出の過程は省略するが，方位角方向に波数展開した形で，動径波数 k，位相，振幅の時間依存性を残したまま，計算を進めると以下のような分散関係式が得られる．

$$\omega = m\overline{\Omega}_R + \frac{m}{R}\frac{(d\overline{\zeta}/dr)_R}{k^2 + m^2/R^2}. \tag{4.25}$$

ここで，下付きの R は中心から半径 $r = R$ の値であることを意味し，m はそれぞれ方位角方向の波数と動径方向の波数を表す．また，動径方向と方位角方向の位相速度を $C_{pr} = \omega/k, C_{p\phi} = \omega R/m$ と定義すれば，

$$C_{pr} = \frac{m}{k}\overline{\Omega}_R + \frac{m}{Rk}\frac{(d\overline{\zeta}/dr)_R}{k^2 + m^2/R^2} \tag{4.26}$$

$$C_{p\phi} = R\overline{\Omega}_R + \frac{(d\overline{\zeta}/dr)_R}{k^2 + m^2/R^2}, \tag{4.27}$$

となり，群速度を $C_{gr} = \partial\omega/\partial k, C_{g\phi} = \partial\omega/\partial(m/R)$ と定義すれば，

$$C_{gr} = -\frac{2km(d\overline{\zeta}/dr)_R}{R(k^2 + m^2/R^2)^2} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} C_{g\phi} &= R\overline{\Omega}_R + \frac{(d\overline{\zeta}/dr)_R}{(k^2 + m^2/R^2)^2} \\ &\times \left(k_0^2 - \frac{n^2}{R^2}\left(1 + t^2R^2\left(\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial r}\right)_R^2\right)\right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

となる．上述の結果は，いくつかの示唆に富んでいる．まず，式 (4.25) は一様な東西風が与えられた場合の β 平面上における非発散順圧ロスビー波の分散関係式に酷似しており，惑星渦度の南北勾配の代わりに，基本場の鉛直渦度の動径勾配が現れている．式 (4.27) は，位相が基本場に対して相対的に，渦度が高い方を右に見るように進むことを示しているが (図 4.2(a)) これは北に行くほど基本場のコリオリパラメータが大きくなるために惑星ロスビー波の位相速度が西進すること (図 4.2(c)) と類似している．

また，式 (4.28) から渦ロスビー波はどこまでも外側へ遠くに伝播していくわけではないと考えられる．このことは，以下のことから分かる．式 (4.25) の導出の過程において，論文中で動径方向の波数について次の関係式が得られる．

$$k(t) = k(0) - mt\left(\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial r}\right)_R. \tag{4.30}$$

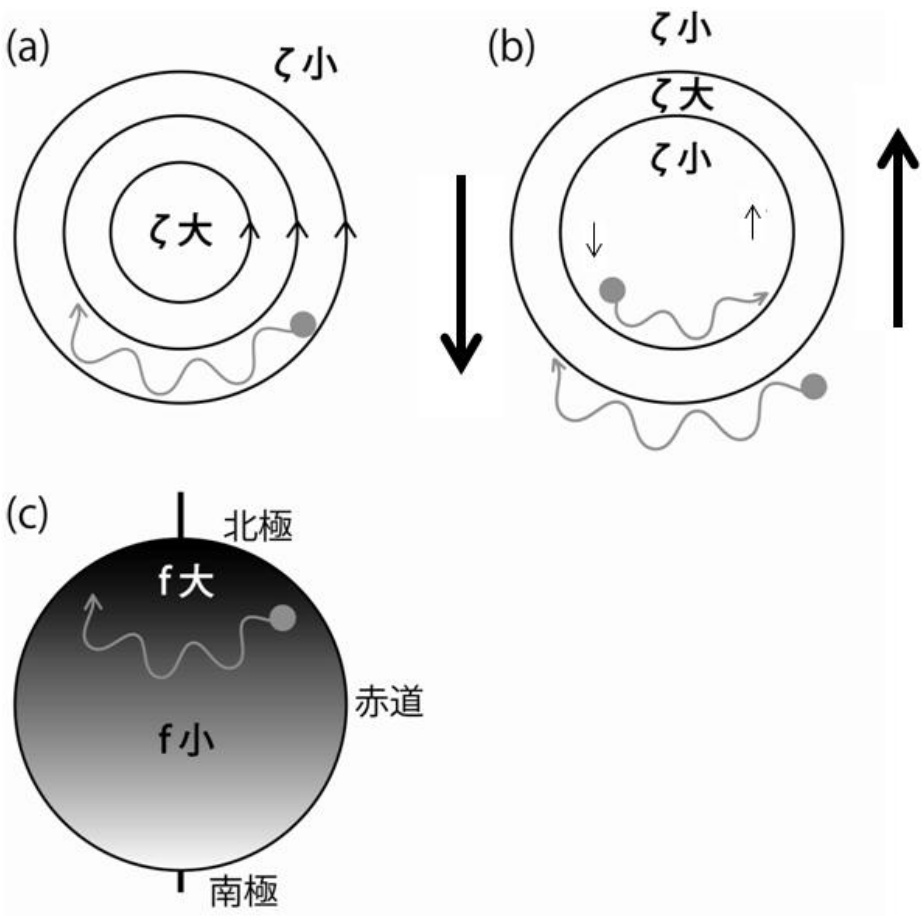

図 4.2: (a) 中心付近に基本場の渦度の極大値がある場合の渦ロスビー波の模式図 (b) 壁雲域に基本場の渦度の極大値があることを想定した場合の模式図 (c) 惑星ロスビー波の模式図．板野 (2010) を改変したもの．

この式は中心から離れるに従って基本場の渦度が小さくなっていく ($(\partial\overline{\Omega}/\partial r)_R < 0$) とすると，擾乱の構造がどんどん捻じ曲げられ，動径波数 k が大きくなっていくことを意味している．ところが，式 (4.28) から分かるように，動径方向の波数が大きくなると，群速度は k^{-3} に比例するため，動径方向の群速度は小さくなる．すなわち，渦ロスビー波のエネルギーが発せられると，ある一定の半径 (”stagnation radius”) に滞留することが示唆される．このことは，台風の内部コアにおける渦ロスビー波の伝播及び波活動による輸送を考える上で，重要なポイントである．

4.2.2 渦ロスビー波の不安定モード

今度は基本場として，図 4.2(b) のような渦度場を考えてみよう．先ほども述べたように，このような渦度分布は壁雲域において非断熱加熱が顕著な場合の典型例を模しており，中心から少し離れた地点に基本場の渦度の極大値がある．図 4.2(a) のように中心に極大値がある場合との大きな違いは，

微小な擾乱が不安定によって拡大しうるという点である．よく知られているように，β 平面上で基本場の渦度の南北勾配が符号を変える地点がある場合には順圧不安定に関する必要条件 (Rayleigh-Kuo の条件) が満たされるが，それと同様に，基本場が渦システムである場合においても，基本場の渦度動径勾配が正負の符号を変える地点が存在することで擾乱発達の必要条件が満たされる (Gent and McWilliams, 1986).

図 4.2(b) を考えると，渦ロスビー波は，基本場の渦度が高いところを右に見るような（基本場に相対的な）位相速度を持つので，渦度が極大を示す領域より内側では，図のように反時計まわりに伝播し，外側では時計回りに伝播する．ところが，基本場の接線風は，内側よりも外側の方が反時計回りの成分が大きいので，2 つの波動はフェーズロックを起こす.

Schubert et al. (1999) は図 4.2(b) のような基本場の渦度分布を想定し，ごく単純な場合における順圧不安定に伴う擾乱の成長率を解析的理論によって求めている．彼らは (1) 高渦度領域の渦度に対して眼の領域の渦度が相対的にどれだけ大きいかを表すパラメータ (2) 高渦度領域の相対的な薄さを表すパラメータ (3) 接線方向の波数 ，についての依存性を示している．計算結果からは，シャープな渦度分布を持った眼や壁雲の近傍で，渦ロスビー波が発達しやすく，メソ渦ができやすいことを示唆している．また，最大成長率を示す波数はに依存して異なる値をとるという点も注目に値する．得られた解析解に従えば，高渦度領域が薄い場合には高波数の擾乱が高い成長率を示すことが期待される.

4.2.3　壁雲近傍での渦ロスビー波の台風中での役割

さて，ここまで渦ロスビー波に関する基礎的な理論に触れてきたが，台風の内部コア領域において渦ロスビー波が果たす役割について，いくつかの研究を挙げることにしよう．まず，Montgomery and Kallenbach (1997) は，浅水方程式系モデルの数値計算をもとに上述の WKB 近似がある程度妥当であることを確かめるとともに，このような渦ロスビー波が壁雲から外側へと広がるインナーレインバンドの構造を説明するものだと考えた．また，Kuo et al. (1999) は，台風 9609 号 (Typhoon Herb) において，眼の楕円形構造の回転周期が，渦ロスビー波及び非発散順圧渦度方程式の厳密解である Kirchoff の楕円渦で説明されることを示している.

渦ロスビー波は，非対称構造として現れるというだけでなく，波数間の相互作用を通じ，軸対称成分についても影響を及ぼすと考えられている．例えば，擾乱が有限振幅の渦ロスビー波として成長する場合には，軸対称成分から非軸対称成分への運動エネルギーの受け渡しがあることになる Montgomery and Kallenbach (1997); Itano and Ishikawa (2002); Wang (2002); Yang et al. (2007)．そのため，渦ロスビー波が存在することにより，軸対称成分としての接線風速は渦ロスビー波が存在しない場合よりも弱められることが考えられる．この式を接線方向の平均値の式に直すと，以下のように擾乱成分

による寄与が含まれる[5].

$$\frac{\partial r\overline{v}}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial r^2\overline{u}\,\overline{v}}{\partial r} - \frac{\partial r\overline{v}\,\overline{w}}{\partial z} - fr\overline{u} - \frac{1}{r}\frac{\partial r^2\overline{u'v'}}{\partial r} - \frac{\partial r\overline{v'w'}}{\partial z} + r\overline{F_v} \tag{4.31}$$

３次元モデルを用いた数値実験では，下層の壁雲付近で $-(1/r)(\partial r^2\overline{u'v'}/\partial r) - (\partial r\overline{v'w'}/\partial z)$ の項が大きくなり，最大風速半径付近で接線風速が減速され，それより少し内側では接線風速の加速が起こる Montgomery and Kallenbach (1997); Yang et al. (2007)．これは主に渦ロスビー波の影響であると考えられている．

その一方で，渦ロスビー波の存在により，台風は強化されるのではないかという議論もある．渦ロスビー波は，台風の壁雲を挟んで内側と外側での空気塊の混合を引き起こす．台風の眼の領域の海面付近にはなかなか取り込まれない高相当温位気塊が存在することが期待されるため，壁雲を挟んだ混合が促進されることにより，台風の中心付近から壁雲領域へ供給される熱エネルギーが多くなるという理屈である Bell and Montgomery (2008)．近年，渦ロスビー波の強度への影響を調べる理想化数値実験が行われているが，中心付近の高相当温位気塊が壁雲領域に取り込まれる効果よりも非軸対称成分へのエネルギーの受け渡し効果の方が大きく，渦ロスビー波の存在を認めるような実験設定にした場合には台風強度が若干弱くなる傾向にあるようである (Yang et al., 2007)．この他にも，渦ロスビー波に伴う渦運動エネルギーが stagnation radius に滞留することによって，4.7 節で述べる第二の壁雲の形成の引き金となることを示唆する研究もある (e.g., Qiu et al., 2010) が，もし，本当にこれが現実に起こっていることだとするならば，渦ロスビー波の存在が台風の著しい強度変化にも関与する場合があるということになる．

4.3 台風へのストークスの定理の応用

理想化した二次元平面を考えて，台風がある領域に集中した相対渦度として表され，他には何も存在しないとする．水平方向に十分遠方において，風速はゼロになると考えられるため，十分遠方にとった閉曲線上で式 (4.6) に従って計算した循環はゼロである．ところが，ストークスの定理によると，これは，閉曲線で囲まれた領域における渦度の面積分に等しいので，正の相対渦度だけが存在するということはあり得ない．正の相対渦度の外側には負の相対渦度が存在しなければならないのである．

ここでは二次元平面を使ったが，面白いことに，コンポジット解析に基づく台風中心付近の絶対渦度分布を示した??を改めて見てみると，現実の台風においても，台風の中心付近では絶対渦度が f より大きくなっているのに対して，700km 以上の外側の領域では f よりも小さくなっている (=相対渦度が負になっている) ことがわかる．台風以外に顕著な現象がなければ，さらにその外側で相対渦度はゼロに漸近していくと考えられる．

[5] この節での上付きのバーとプライムはそれぞれ，接線方向の平均値とそこからの偏差を表す．

前節の内容を思い出すと，基本場の渦度勾配が動径方向に向きを変える場所があるとき，渦ロスビー波は発達しうるのであった．外側に向かうにつれて，一旦渦度が小さくなり，それより外側で f に漸近する場合には，渦ロスビー波発達の必要条件が満たされることになる．このような渦ロスビー波の存在は台風の進路予報と密接に関連している可能性がある．

第5章　台風に伴う降水

5.1　レインバンド

- インナーレインバンドが渦ロスビー波で説明できるとする説 (Montgomery and Kallenbach, 1997)
- コールドプールの形成に伴ってレインバンドが外側に伝播するとする説 Sawada and Iwasaki (2010)

（以下，執筆中；鉛直シアの影響など）

第6章　外的強制力

6.1　鉛直シアの影響

台風周辺における大規模場の水平風に鉛直シア[1)]があると，台風の構造や強度に著しい影響が出ることが知られており，数多くの研究が積み重ねられてきた．観測や再解析データに基づいて知られている事実としては以下のようなことがあげられる．

- 台風は激しい鉛直シアのもとでは強くならない．
- 降水の最大域は（特に洋上では）シアベクトルに対して左前方に現れることが多い．

6.1.1　理想モデルの結果

一般に，乾燥大気モデルだけから得られる結果は，観測的事実と整合的ではない．以下の結果は，Jones (1995) に基づく．

- 上昇流は渦が傾斜する方向の右側に現れ，下降流が左側に現れる．
- 等温位面は渦が傾斜した方向の前方において持ち上げられ，後方では押し下げられる．
- 下層の渦の中心と上層の渦の中心は時間を経るにしたがって離れていき，およそ，数日で水平距離にして数百キロから 1000 キロも離れてしまう．

その一方で，湿潤過程を含んだモデルを用いると，基本的な特徴は，現実の台風におけるものと整合的となる．

- 降水量の最大域はシアベクトルの左前方に現れる．
- 下層の渦と上層の渦はそれほど離れない．

[1)] 台風研究の慣例では，単に「鉛直シア」と呼ぶときには台風周辺における大規模場の水平風の鉛直シアを指す．以後，この慣例に従う．

このため，基本的には，鉛直シアが台風の非対称性に及ぼす影響を調べるうえでは，湿潤過程の影響を無視することはできない．しかし，このことは湿潤モデルを用いた結果において力学過程が重要でないことを意味しない．Reasor et al. (2004) は湿潤モデルを用い，鉛直シアに吹かれて渦が傾斜した場合に動径波数 1 の成分が表れるが，渦ロスビー波が散逸し，動径風速に転化される効果を通じて，傾きが抑えられると述べている．

また，鉛直シアの寄与は一般に渦が強いほど相対的に小さくなると考えられる．というのは，構造の深さの指標となるロスビーの深さを考えたとき，強い渦であるほどロスビーの深さは大きいため，鉛直方向に直立した構造ができやすくなるためである (Jones, 1995).

第7章　台風境界層

境界層とは，下端境界の存在に影響される層である (Stull, 1988) が，台風の場合には，その下端である海面（しかも海洋内部の）とその上端の自由大気における深い対流の両者が影響を及ぼしうる非常に複雑なものであり，何種類かの定義がある．古くからの定義として用いられてきたのは，仮温度が地表面より 0.5 ℃低い高度を境界層上端の高度として定義する方法である (Anthes and Chang, 1978)．この種類の境界層は，台風境界層の混合層としての特徴に注目したもので，中心から外側に向けて高度が高くなっていくと考えられている (Zhang et al., 2011)．第 2 の定義としては，台風の中心に向かうインフロー層を採用する例が知られている．Zhang et al. (2011) は，ドロップゾンデ観測の結果をもとに，このような層は内部コア領域から外側に向けて高くなるような傾きをもっており，過去の数値実験の結果と整合的であることを述べている．Kepert (2001) らは，エクマン層からの類推に関連した境界層について述べている．

7.1　エクマン境界層からの類推に関連した定義

Kepert (2001) らは，エクマン境界層に関連した台風境界層について述べている．といっても，ロスビー数は 10∼100 程度の値であるから，流体粒子に及ぶ遠心力は無視できず，水平・鉛直移流が無視できないので鉛直一次元的な取り扱いをしてもよいという仮定も一般には満たされない．そのような意味では，台風状況下の大気境界層は，一般のエクマン境界層とは構造が異なると考えられている．

Kepert (2001) は，定常状態・乾燥大気・下端境界は摩擦係数に基づいた式・鉛直移流の寄与は小さい・u の 2 次以上の項を無視する（この近似により，オーバーシュートの効果は無視される），などのいくつかの仮定のもと，方程式を解析的に解き，台風状況下の境界層の構造について明らかにしようとした．筆者たちも述べている通り，近似をしたことによる限界があるため，特に壁雲付近では適用に注意が必要であるが，壁雲より外側の super-gradient などはこれで説明がつくと考えられる．彼らの定式化によると，軸対称成分は，複素数形式で以下のように書くことができる．また，ここでは述べないが非軸対称成分の強さは，台風の並進速度の大きさに依存する．詳細については原論文を参照されたい．

$$\sqrt{\frac{f+\frac{2v_G}{r}}{f+\zeta_G}}u' + v'i = A_0 \exp\left(-\frac{z+iz}{\delta_0}\right) \tag{7.1}$$

$$A_0 \equiv -\chi \frac{1+i(1+\chi)v_G}{2\chi^2+3\chi+2} \tag{7.2}$$

$$\chi \equiv Cv_G\sqrt{\frac{2}{KI}} \tag{7.3}$$

$$\delta_0 \equiv \sqrt{\frac{2K}{I}} \tag{7.4}$$

ここで K は拡散係数（一定値），C は摩擦係数（一定値）[1],u' と v' は傾度風からの偏差のうち，軸対称成分を指している．この式が示唆していることはいくつかある．一つは，境界層の厚さが，古典的なエクマン層の厚さ $\sqrt{2K/f}$ ではなく，厚さ $\sqrt{2K/I}$ になっているということである．このことは，慣性安定度が大きくなる中心付近ほど，境界層の厚さが薄くなるということである．もう一つは，式 (7.1) から分かるように，$f+2v_G/r$ が絶対渦度 $f+\zeta_G$ に比べて相対的に小さくなる場合には，他のパラメータが変わらない場合，u' が強いということである．これは，例えば，最大風速半径の外側で $f+\zeta_G = f+v_G/r+\partial v_G/\partial r$ において，右式の第 2 項と第 3 項がキャンセルするような場合である．

さらに，境界層の構造がこの式で表されるならば，v' が最大値をとる高度とその値を計算することができる．

$$z_{\max} = \delta_0 \arctan(-1-\frac{2}{\chi}) \tag{7.5}$$

$$v'_{\max} = V\frac{\exp(z_{\max})}{\sqrt{2}}\frac{\chi\sqrt{\chi^2+2\chi+2}}{2\chi^2+3\chi+2} \tag{7.6}$$

典型的な値を代入すると，壁雲の外側では 2-4%の super-gradient の状態になっていることがわかる．Kepert and Wang (2001) では，数値モデルを用いて，鉛直移流を考慮することで，より観測に近い値を示すことになることが示されている．

下層での収束を計算すると，上昇流の最大値を示す位置についても計算することができる．ただ，ここでの議論は，先にのべたような近似があるため，現実の境界層を表すのには限界があると考えられる (Kepert and Wang, 2001).

7.2 構造の非対称性

Kepert (2001) の理論によれば，境界層には台風の移動速度に関連した非軸対称構造があり，Kepert (2006a,b) はそのような非軸対称構造が現実の台風にも存在することを示している．

（以下，執筆中：ロール状対流，など）

[1] ここでは，傾度風の風速と独立に値を決めるとしている．

第8章　台風状況下の海面状態

（執筆中：海面波浪の基礎，波しぶき,）

第9章　台風海洋相互作用

9.1　大まかな話

台風と海洋は，非常に密接な関係にある．よく知られているように，台風のエネルギーの大半は，海から大気に渡された水蒸気が，凝結することによって発せられた潜熱に起因している．そのため，海面水温が高いところで，台風は強くなることが期待される．ところが，大気が海洋側にする仕事は風速の３乗と海面の状態から決まる摩擦係数に比例するので，台風が発達するにしたがって，海洋は激しくかきまぜられることになる．一般的に，海洋では表層に温度がほぼ一様な海洋混合層があり，その下に冷たい水があるため，かきまぜの効果が強くなると，海洋が台風を強くしすぎないように，フィードバックが働くことになる．

台風通過時の海面水温は，1-6 ℃程度低下し，中には 10 ℃近く低下した例も報告されている (Lin et al., 2003)．この効果の結果，大気海洋結合モデルにおける台風の中心気圧は，大気単体のモデルによって再現される中心気圧と 30hPa 以上異なることもあり，猛烈な台風の場合により顕著な差となる Schade and Emanuel (1999)．観測的研究から，このような海面水温偏差は 1 週間以上持続する場合もあることが報告されている (Price, 1983; Zedler et al., 2009)．

また，Niwa and Hibiya (1997) は，解析的及び数値的研究により，台風によって海洋表層で近慣性周期を持つ波と近慣性周期の 2 倍から 3 倍程度の周期を持つ波が励起され，特に近慣性周期よりも長い周期を持つ波は，等密度面混合を通じて効率的に海洋深層へとエネルギー伝播を行う可能性があることを示唆した．さらに，台風による海洋の撹拌によって，豊富な栄養塩が有光層にもたらされるため，台風の存在がプランクトンなどの生物生産にも大きなインパクトを持つとされる Lin et al. (2003)．

本章では，台風がどのように海洋をまぜるのか，また，海洋が台風の強度にどのようにかかわっているのかを紹介したい．

9.2　１次元過程と３次元過程

台風によるかきまぜ効果は，簡単に言うと，海洋混合層底部でのエントレインメント (1 次元過程) とエクマン湧昇の作用 (3 次元過程) に分けられる．まず，台風によって海洋混合層が持つ運動エネルギーが成層の度合いに比べて極めて大きくなる．これを解消しようと，混合層より深いところにある

冷たい水が混合層に取り込まれ（エントレインメント），海洋混合層は温度が下がり，より厚くなる（図 9.1 上段）．また，エクマン輸送によって，水塊は海面応力の向きより右側に輸送されるので，台風のように低気圧性の渦の直下では，冷たい水が湧昇することになる（エクマン湧昇; 図 9.1 下段）．前者は，海洋混合層が冷たい水を取り込んで，より冷たくなるという効果であるのに対して，後者は，海洋混合層よりも深いところにあった冷たい水が海面付近まで持ち上げられる効果である．おおむね台風の移動速度 5m/s よりも遅い場合には，エクマン湧昇の寄与がエントレインメントの効果よりも大きくなり，大きく温度が下がる傾向にあると考えられている (Yablonsky and Ginis, 2009).

9.3 台風から海洋への影響

9.3.1 下層へのエネルギー伝播

- 慣性重力波

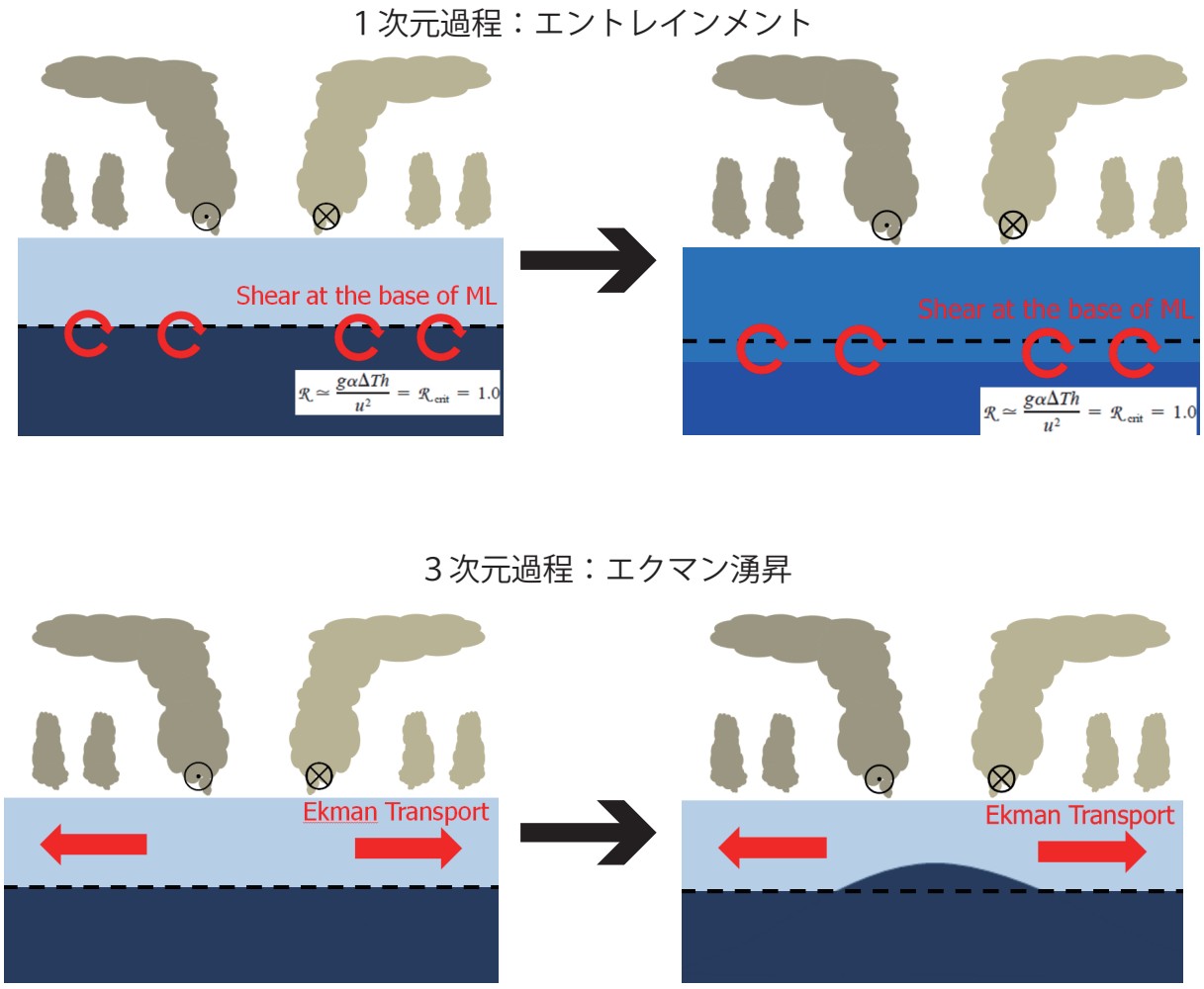

図 9.1: 上段：1 次元的な海洋混合．下段：3 次元的な海洋混合．

- 波-波相互作用

（執筆中；台風の強度と海洋，海面過程，エクマンパンピング，海洋混合層でのエントレインメントなど）

第10章　台風と地形の相互作用

（執筆中；特徴的な無次元パラメータ，チャンネリング効果)

第11章　台風の強度

11.1　台風強度の基礎理論

台風の強度に影響を与える要素としては，気温や湿度の分布・水平風の鉛直シア・乾燥したエアロゾルの侵入・海面波浪と大気側との摩擦・海面水温などが考えられている．ただ，あまり複雑なことを考えすぎるといつまでたっても台風の強度を理解したことにならないので，理想的な状況を設定し，台風がどこまで強くなりうるかを調べる研究も積極的に行われてきた．このような強度の上限を最大到達可能強度 (Maximum Potential Intensity; MPI) と呼ぶ．MPI の理論としては，Emanuel (1986) が提案した WISHE(Wind-Induced Surface Heat Exchange; 近年では E-MPI とも) と呼ばれるメカニズムと，それに連なる一連の研究 (Emanuel, 1988; **?**; Bister and Emanuel, 1998) が広く受け入れられている．おおもとの Emanuel (1986) 論文では，定常状態の台風の内部コア領域を考え，静水圧平衡・傾度風平衡が満たされ，傾斜湿潤対流に対して中立であるという条件を課すことによって，台風の構造や強度を解析的理論によって導出している．この理論は，やや難解だが，最大風速だけを考える場合，エネルギーバランスを考えるだけでも，同様の結果が得られる．そこで，ここでは，まず，エネルギーバランスを考えた場合の最大風速について示し，そのあとで，解析的理論について紹介する．

11.1.1　MPI: エネルギーバランスの観点から

エネルギーバランスの観点で考える場合，台風が暖かい海面でエネルギーを受け取り，冷たい上空のアウトフロー域でエネルギーを失うことによって，あたかもカルノーエンジンのように動作するという仮説を基本としている．これによって得られる機械的エネルギーは，最終的に海面摩擦によって失われる量と釣り合う．Emanuel (1995) では，眼の領域が旋衡風平衡の状況にあり，海面でのエントロピーフラックスと半径方向のエントロピーフラックスの移流が等しいという定常状態を仮定した．さらに，Bister and Emanuel (1998) は，境界層内での散逸加熱を考慮することにより，新しい MPI を提案したているほか，超傾度風を加味した式がが Bryan and Rotunno (2009c) により提案されている[1)]．

[1)] ただし，この定式化は環境場から最大風速が決まるという Emanuel (1986) 理論の大きな特徴をもっているかどうかわかっていない．

基本的には，WISHE 理論は，簡単にはカルノーエンジンに似たサイクルを持つ機関として説明することができる (Emanuel, 1997; Lin, 2007)．時間的に定常で，傾度風平衡を満たしており，背景場が傾斜湿潤対流に対して中立な状態を想定した，軸対称的な構造をした渦について考えよう．図 11.1 中に示したような二次循環があるとすれば，サイクルを通して，境界層を通り壁雲域へ流入する際に海面を通じて熱量が与えられ (LEG 1)，上層のアウトフローにより外側に放出された大気が放射過程によって熱量が失われる (LEG 3)．その間の LEG 2 と LEG 4 で表される部分は，カルノーサイクルの断熱膨張と断熱圧縮に相当する部分になる．サイクル全体を通しての熱量の流入と摩擦によって失われる運動エネルギーの散逸を考えれば，以下の等式が成り立つことが分かる．

$$\int_{r_{\max}}^{r_{\mathrm{out}}} \rho \frac{T_s - T_{\mathrm{out}}}{T_s} T_s C_{\mathrm{k}} |\boldsymbol{V}| (S_s^* - S_b) r dr = \int_{r_{\max}}^{r_{\mathrm{out}}} \rho C_{\mathrm{D}} |\boldsymbol{V}|^3 r dr. \tag{11.1}$$

ここで，下付き文字の max は接線風速が最大値を示す地点での値，下付き文字の out は放射による冷却が起こるアウトフロー域の十分外側の地点（正確な定義は式 (11.19) に示す）での値，下付き文字の s と b はそれぞれ海面における値と境界層[2)]における値を表し，上付きの $(\cdot)^*$ は飽和状態における値であることを意味する．また，r は中心からの距離，ρ は大気の密度，$\boldsymbol{V}$ は風速の水平成分を表している．大文字 S は比エントロピーを表し，

$$(C_p(1-q_v) + C_l q_v) \ln T + L q_v / T - [R_d(1-q_v) + R_v q_v] \ln p \tag{11.2}$$

で定義される．ここで，C_p は乾燥大気の定圧比熱，C_l は液体の水の定圧比熱，q_v は比湿，T は絶対温度，L は単位質量あたりの凝結により生じる潜熱，R_d は乾燥大気の気体定数，R_v は水蒸気の気体定数，p は気圧である．係数 C_{D} と C_{k} は境界層内の海面フラックスを以下のようにパラメタライズした場合に現れる係数でありバルク係数と呼ばれる（海面過程を扱う際に用いられるバルク係数は海面交換係数とも呼ばれる．本論文では，特に必要がない限り，海面交換係数という単語を用いるものとする）．

$$\boldsymbol{\tau} = -\rho C_{\mathrm{D}} |\boldsymbol{V}| \boldsymbol{V} \tag{11.3}$$

$$F_{\mathrm{k}} = -\rho C_{\mathrm{k}} |\boldsymbol{V}| (k_{\mathrm{s}} - k_{\mathrm{l}}). \tag{11.4}$$

ただし，k は比エンタルピーを表し，以下の式で定義される値である．

$$k \equiv [C_p(1-q_v) + C_l q_v] T + L q_v. \tag{11.5}$$

最大到達可能強度たる接線風速の最大値 $v_{\max}$ は式 (11.1) のエネルギーバランスを考えれば，

$$v_{\max}^2 \sim (T_{\mathrm{s}} - T_{\mathrm{out}}) \frac{C_{\mathrm{k}}}{C_D} (S_{\mathrm{s}}^* - S_{\mathrm{b}}), \tag{11.6}$$

[2)] この理論モデルでは，境界層はスラブ状の構造をしていると考える．

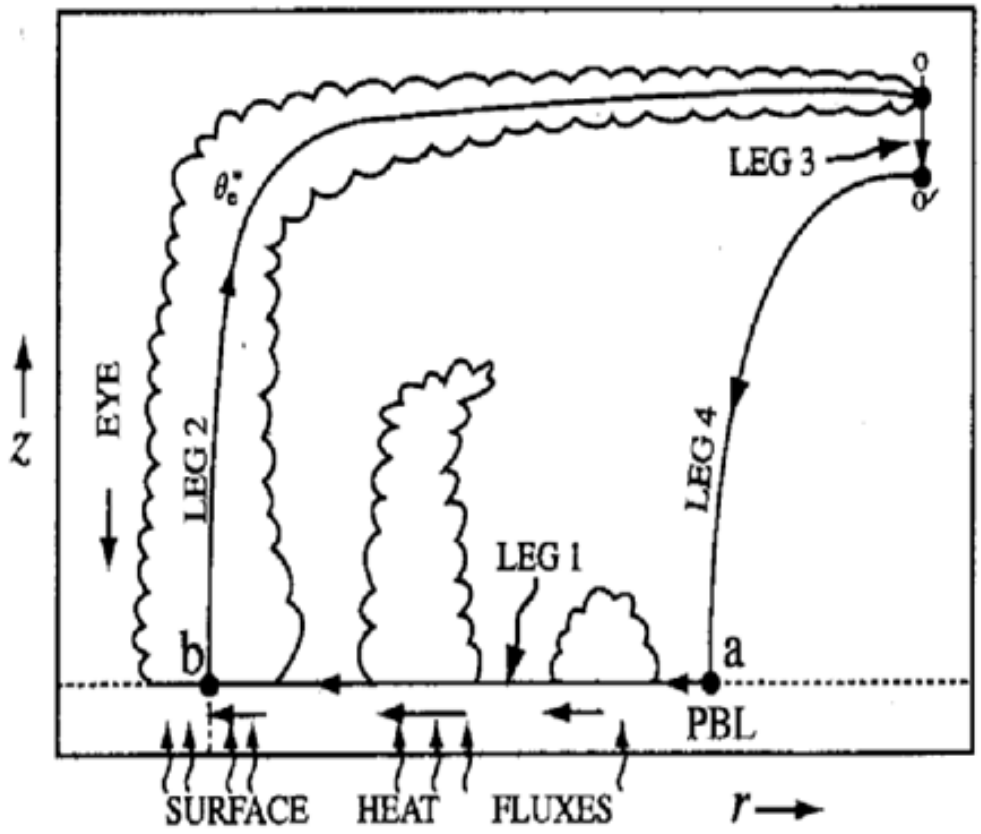

図 11.1: WISHE 理論の模式図 (Lin, 2007).

と近似的に計算できる[3]．より厳密に，海面付近の風速と境界層上端の風速を分けて考えると，境界層上端に現れる最大風速は，以下のような値として計算される[4]．

$$v_{\max}^2 = (T_{\max} - T_{\mathrm{out}})\frac{C_k}{C_D}(S_{\mathrm{s}}^* - S_{\mathrm{out}}). \tag{11.7}$$

ここで，下付き文字の l は接地境界層の上端を意味する．従って，WISHE 理論に基づいて台風の最大風速を求める場合に必要となるパラメータは，海面水温，上空のアウトフロー域の気温，海面付近の水蒸気量，ならびに，海面付近の乱流観測に基づいた海面交換係数である．

ここでは，エネルギー論の観点から議論をしたが，次節以降では，Emanuel (1986) が最大風速以外の構造についてもよく説明していることについて述べる．

[3] ここに現れた C_{D} 及び C_{k} はスラブモデルとしての境界層 (上端は高度 1-2 km) において定義される係数であるが，通常，数値モデルで用いられる C_{D} 及び C_{k} は高度 10 m の乱流フラックスを用いて定義される点に注意が必要である．

[4] もし，Bister and Emanuel (1998) が提案する散逸加熱の効果を考慮するならば，右辺に $T_{\mathrm{s}}/T_{\mathrm{out}}$ を乗じることになる．

11.1.2 MPI: 解析的理論

本小節では，Emanuel (1986) によって提案された台風の最大風速に関する解析的理論についてまとめる．ここでは，適宜，Smith et al. (2008) 及び Bryan and Rotunno (2009c) を参照することとする．

以下では気圧座標系で記述することにする．傾度風平衡と静水圧平衡は以下のように書き表される．

$$g\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p = \frac{M^2}{r^3} - \frac{1}{4}f^2 r \tag{11.8}$$

$$g\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)_r = -\alpha. \tag{11.9}$$

式 (11.9) においては，M は角運動量，α は比容，r は中心からの距離，p は気圧，g は重力加速度，z は高度を表す．この式から気圧座標系におけるジオポテンシャル gz を消去すると，以下の温度風関係が得られる．

$$\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial M^2}{\partial p}\right)_r = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)_p. \tag{11.10}$$

飽和湿潤エントロピー S^* を用いて，α を p と S^* の関数とみなすならば，式 (11.10) は以下のように変形される．

$$\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial M^2}{\partial p}\right)_r = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial S^*}\right)_p \left(\frac{\partial S^*}{\partial r}\right)_p. \tag{11.11}$$

ここで，熱力学についての Maxwell の関係式：

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial S^*}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S^*}, \tag{11.12}$$

を用いれば，式 (11.11) は，

$$\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial M^2}{\partial p}\right)_r = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S^*} \left(\frac{\partial S^*}{\partial r}\right)_p, \tag{11.13}$$

となる．今，等絶対角運動量面と等 S^* 面が一致するとすれば，S^* は M のみに依存する関数とみなすことができて，以下の式が導ける．

$$\frac{2M}{r^3}\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_r = -\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S^*} \frac{dS^*}{dM} \left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_p. \tag{11.14}$$

ここで，等絶対角運動量面に沿うと，

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_p dr + \left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_r dp = 0, \tag{11.15}$$

が成り立つから，以下の式が成り立つ．

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_p \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)_M + \left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_r = 0. \tag{11.16}$$

式 (11.15) と式 (11.16) を用いて，温度風関係 [式 (11.13)] を変形すると，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r^{-2}}{\partial p}\right)_M = -\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S^*} \frac{dS^*}{dM}, \tag{11.17}$$

となる．この式を等角運動量線に沿って，境界層の上端から十分に外側の半径（外部半径）$r_{\rm out}$ まで積分すると，

$$\frac{1}{r^2}\,|_M - \frac{1}{r_{\rm out}^2}\,|_M = -\frac{1}{M}\frac{dS^*}{dM}[T - T_{\rm out}(S^*, p_{\rm out})], \tag{11.18}$$

となる．台風の外部半径 $r_{\rm out}$ は，Emanuel (1986) によれば，

$$r_{\rm out}^{2+2\beta} = r_{\rm max}^{2\beta}\frac{C_{\rm k}}{C_{\rm D}}\frac{T_{\rm B}}{T_{\rm s}}\frac{Lq_{v,a}^*}{f^2}(1 - RH_{as})(1+\beta) \tag{11.19}$$

$$\beta \equiv 1 - \frac{T_{\rm B} - T_{\rm out}}{T_{\rm B}}\left(1 + \frac{Lq_{v,a}^* RH_{b,a}}{RT_{\rm s}}\right), \tag{11.20}$$

と計算できる（RH は相対湿度，q_v は比湿，下付き文字の a は環境場の値）．$r_{\rm out} \gg r$ であるから，連鎖律から以下の式が導かれる．

$$\frac{1}{r^2}\,|_M - \frac{1}{r_{\rm out}^2}\,|_M = -\frac{1}{M}\frac{\left(\frac{\partial S^*}{\partial r}\right)_z}{\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_z}[T - T_{\rm out}]. \tag{11.21}$$

式を変形し，これを $z = h$ に適用すると，

$$-[T_{\rm B} - T_{\rm out}]\frac{\partial S^*}{\partial r} = \frac{1}{2r^2}\frac{\partial M^2}{\partial r}, \quad \text{at} \quad z = h, \tag{11.22}$$

となる．ここで，エクスナー関数 $\pi = (p/p_0)^{(R/C_p)}$(p_0 は 1015.0 mb で一定値) を用いて表現した傾度風平衡の式は，

$$M^2 = r^3\left[c_p T_B\left(\frac{\partial \ln \pi}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}rf^4\right], \tag{11.23}$$

であるから，式 (11.22) に式 (11.23) を組み合わせて，

$$-\frac{T_{\rm B} - T_{\rm out}(S^*, p_{\rm out})}{T_{\rm B}}\frac{\partial \ln \theta_e^*}{\partial r} = \frac{\partial \ln \pi}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \ln \pi}{\partial r}\right) + \frac{1}{2}\frac{rf^2}{C_p T_{\rm B}}, \quad \text{at} \quad z = h, \tag{11.24}$$

である．この式を導出する際には，境界層の上端 $z = h$ において $\theta_e = \theta_e^*$ であるとした．この方程式を $z = h$ 上で，r から十分遠い距離 $r = r_{\rm o}$ まで積分することを考える（下付き文字の o は $z = h$ 上の中心から十分に離れた位置のこと）．このとき，$T_{\rm B}$ を一定値とすれば，

$$\begin{aligned} - \quad & \ln \theta_{e,o}^* + \ln \theta_e^* + \frac{1}{T_{\rm B}}\int_r^{r_{\rm out}} T_{\rm out}(S^*, p_{\rm out})\frac{\partial \ln \theta_e}{\partial r}dr \\ & = \ln \pi_{\rm o} - \ln \pi + \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial \ln \pi}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial \ln \pi}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}\frac{f^2}{C_p T_{\rm B}}(r_{\rm o}^2 - r^2), \quad \text{at} \quad z = h, \end{aligned} \tag{11.25}$$

という式が得られる．Emanuel (1986) は，

$$\overline{T}_{\rm out} \equiv \int_{\ln \theta_{e,\rm out}}^{\ln \theta_e^*} T_{\rm out} d(\ln \theta_e^*), \tag{11.26}$$

という量を定義した．この量は，アウトフロー域の絶対角運動量面における飽和湿潤エントロピーで重みづけしたアウトフロー域の平均気温である．

十分に離れた地点の π を π_o として，$\ln(\pi/\pi_o)$，及び，その動径方向の微分は無視でき，等絶対角運動量面が境界層上端に達した場合には，相当温位 θ_e が飽和相当温位 θ_e^* に等しいとしていることに気づくと，以下の式が導かれる．

$$\frac{T_\mathrm{B}-\overline{T}_\mathrm{out}}{T_\mathrm{B}}\ln\left(\frac{\theta_e^*}{\theta_{eo}^*}\right)=\ln\left(\frac{\pi_o}{\pi}\right)-\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial\ln\pi}{\partial r}\right)+\frac{1}{4}\frac{f^2}{c_pT_\mathrm{B}}(r_o^2-r^2),\ \ \mathrm{at}\ \ z=h, \tag{11.27}$$

ここでスラブ状の境界層について考えると，S と M については，以下の式が導かれる．

$$\left.\frac{\partial S}{\partial M}\right|_{z=h}=\frac{\tau_S}{\tau_M}. \tag{11.28}$$

ただし，$\tau_S=-C_pC_\mathrm{k}|\boldsymbol{V}|(\ln\theta_e-\ln\theta_{e,s}^*)$, $\tau_M=-C_\mathrm{D}|\boldsymbol{V}|rv$ である．式 (11.28) の導出には，比エントロピー及び相当温位は境界層内で一様であるとし，サブクラウド層の上端では飽和していて $S_b=S^*$ 及び $\theta_e=\theta_e^*$ であることを仮定した．この式と式 (11.22) を組み合わせることにより，

$$\ln\theta_e^*=\ln\theta_{e,s}^*-\frac{C_\mathrm{D}}{C_\mathrm{k}}\frac{1}{C_p(T_\mathrm{B}-T_\mathrm{out})}\left(|\boldsymbol{V}|^2+\frac{1}{2}rf\boldsymbol{V}\right),\ \ \mathrm{at}\ \ z=h, \tag{11.29}$$

が導かれる．壁雲領域においては，$rf\ll V$ であるから，右辺の括弧の中の第 2 項を無視して，$|\boldsymbol{V}|\sim v$ とすれば，

$$v^2=\frac{C_\mathrm{k}}{C_\mathrm{D}}C_p(T_\mathrm{B}-T_\mathrm{out})(\ln\theta_{e,s}^*-\ln\theta_e^*), \tag{11.30}$$

が得られる．この式が，Emanuel (1986) で導かれた最大風速に関する式である．

11.2 Superintensity

現実に発生する台風の強度は Emanuel や協力者たちが提案してきた理論 (E-MPI) によって示唆される最大到達可能強度の範囲に収まるケースがほとんどである．また，数値計算結果との差もそれほど大きくはないとされてきた．しかし，ごく近年になって，高解像度の非静力学軸対称モデル（水平格子点間隔 <4 km）を用いた場合に，計算結果として現れる最大風速が E-MPI を 50%近く上回るケースが報告されるようになった (Persing and Montgomery, 2003).

その理由として Persing and Montgomery (2003) は眼の領域で得られる高エントロピーの気塊が壁雲に到達するエネルギーとして考慮されていないからだとした．しかし，Bryan and Rotunno (2009a) では，感度実験を行って眼の領域の水蒸気交換係数を増減させても，台風の最大風速は 4%前後しか変化しないことを示した．Bryan and Rotunno (2009b) では，super-gradient と擾乱成分まで考慮した傾度風バランスによって E-MPI が説明できるとしているほか，Wang and Xu (2010) は壁雲直下の値で計算を代表させたことに問題があり，壁雲の外側で散逸加熱が小さく，水蒸気供給が無視できないことが重要なのではないかと主張している．

11.3　最大風速・最大風速半径の変化傾向

Sawyer-Eliassen の式との組み合わせで考えると，最大風速半径に近い領域に熱源もしくは運動量のソースがある場合には，最大風速半径やそのやや内側でも，接線風速を強める変化傾向が現れる[5]．一方で，十分離れたところに熱源もしくは運動量のソースがある場合には，最大風速半径は大きくなるような変化傾向が現れる Shapiro and Willoughby (1982).

（以下，執筆中）

[5]Sawyer-Eliassen の方程式は，バランスしない成分があったときに温度-風関係のバランスに向かって，気圧の場と流れの場を同時に調節するという関係式であり，準傾度風平衡の世界においては，温度-風関係に対する時間変化する式と組み合わせて使ってもよい．その場合には，診断した時間における変化傾向を求めていることになる．

第12章　台風の進路に関する力学

12.1　基本的なことがら

台風の進路は，おおむね対流圏中層の指向流，すなわち，台風の近傍で吹く風の向きに流されると考えられている．しかしながら，台風の進行方向と指向流の向きを比べてみると，系統的な誤差があることが知られている．北半球では指向流に比べて北西にずれ，南半球では西にずれる[1)]．渦が西へ動くことについては,（おおざっぱには）渦が β 平面上の惑星ロスビー波の分散関係式に従い，西に移動する β 効果として説明できる．そこで，本章でははじめに，惑星ロスビー波について改めておさらいしよう[2)]．ただし，南北の移動を含め，ちゃんとした渦の運動を考えるためには，渦自身が大きさを持つことで渦と渦の相互作用が働くことを考慮しなくてはいけない．これについては，12.5 節で述べることにしよう．

12.2　指向流と台風の進路

水平面内の $x-y$ を座標軸とする，以下のような順圧非発散方程式を考える．渦度の生成や消滅は考えない．

$$\frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{12.1}$$

$$\frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{12.2}$$

ここで，$\partial(12.2)/\partial x - \partial(12.1)/\partial y$ を計算すると，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\mathbf{V}\cdot\nabla\zeta - \beta v \tag{12.3}$$

が得られる．このうち，ζ は鉛直渦度，$\mathbf{V}$ に水平風ベクトル (u, v)，f はコリオリパラメータ，β は基準緯度における $\partial f/\partial y$ である．右辺の第一項は移流によって渦が流される効果を表しており，第二項はコリオリパラメータの緯度変化に起因している．

[1)] 転向後の台風を除けば系統的なずれは南西を向く．

[2)] よく知られている説明に，Chan (2010) など多くのテキストに掲載されている模式図を用いた説明があるが，12.4 の移流項にある (東西風 u, 南北風 v) をゼロとし，ベータ効果としては v を残すので，私にはなんとなくしっくりきていない．

12.3　現実の台風の進路

月別の典型的な台風の進路が，気象庁の HP に掲載されている (図 12.1)．本州に接近する台風の多くは 7-9 月にやってくる．そして，6 月や 10 月の台風には本州の南側を通るものが多い．これは，私自身の「台風シーズン」の感覚のとおりである．

台風の進路は，それを吹き流す風の向きと相関が高い．特に，統計的には 300-850hPa の重み付き平均風や 500-700hPa の風向に対する相関が高いと考えられている (Neumann, 1979; Pike, 1985)．図 12.2 に，NCEP の再解析データにおける，600hPa 面ジオポテンシャル高度の月別平均値を示している．地衡流の関係から，これが基本的な大気の流れの向きに対応しているとすると，台風の進路と流れの場が整合的なものになっていることがわかるだろう．時間平均で見ているので，移動性擾乱ははっきりとしないが，基本的に太平洋高気圧は 7-9 月に本州付近に張り出している．これは，ちょうど南の海上で発達した台風が本州に沿うようなコースをなしている[3)]．

いうまでもないことだが，個々の台風によって台風進路のバラつきは大きい．先ほどは気候値を示して典型的なケースについてのみのべたが，台風がどこで発生するか，あるいは，そのときの気圧配置がどうであるかによって，進路は大きく変わる．また，上陸した場合や周囲に強い擾乱がある場合の藤原効果 (12.6 節) には，進路の力学は複雑になると考えられている．ただ，ごく単純な状況を考えると，第一次近似としては，台風の進路は対流圏中層の風に流されて決まると考えてよい．すなわち，移流の効果が卓越していると考えられる．したがって，日本付近の台風の進路を考えるうえでは，太平洋高気圧に代表される気圧配置がどのようになっているのか，ジェット気流がどこにあるのか，というのが最重要注目ポイントである．

12.4　惑星ロスビー波とベータ効果

前節で台風の進路は，大まかには対流圏中層の指向流と整合的であることについて述べた．しかし，実際の台風の進行方向から指向流を引き算してみると系統的に，西向き偏差・極向き偏差があることが知られている．図 12.3 として，Carr and Elsberry (1990) の研究結果を引用した．この図 (a)-(d) では，北西太平洋の台風の動きが，指向流よりも全体として 1.5-2m/s 前後だけ北西を向いていることを示している．

この効果は β 項があることによる寄与だと考えられている．まず，流れに対して相対的な西向き偏差について，惑星ロスビー波としての観点から述べてみよう．

[3)] 余談だが，元が 1174 年に日本を襲った 1 回目の文永の役は現在の暦でいうと 11 月下旬である．このことから考えても，文永の役から日本を救ったのは台風ではなさそうである．爆弾低気圧がこの時期通過した可能性はあるが，それが退却を決めた原因となったのか，深入りを避けようとした将校達の退却判断ののちのことなのかは定かではない（直接見た者の記録が無い）．一方，1181 年の弘安の役で元軍が壊滅的な被害を被ったのは，現在の暦で 8 月下旬であり，また，当日の京都の貴族の日記に暴風が吹き荒れたことが残っているので，こちらは台風であるという可能性が非常に高い．

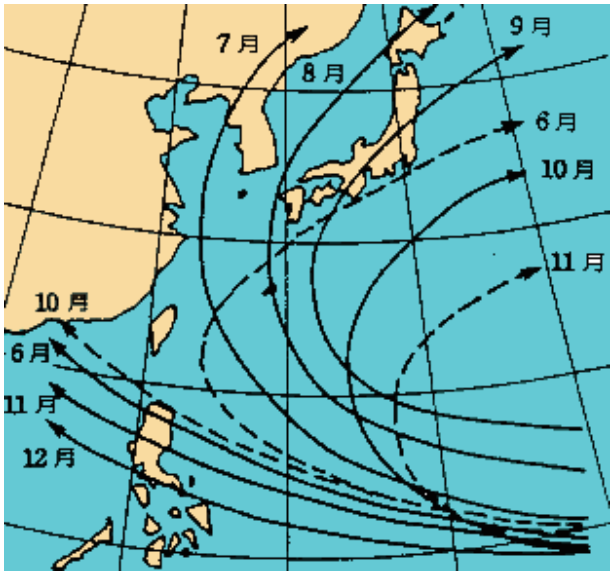

図 12.1: 台風の典型的な進路を月別に分けたもの (気象庁ホームページ; http://www.jma.go.jp/jma/kishou/know/typhoon/1-4.html).

先ほどの式 (12.3) において，基本場を一様な風として上付きのバー $\overline{(\cdot)}$ で表し，そこからの偏差を $(\cdot)'$ で表すことにすると，

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla \zeta' - \beta v' \tag{12.4}$$

となる．ここで，流れが非発散であることから，

$$u = -\partial \psi / \partial y \tag{12.5}$$

$$v = \partial \psi / \partial x \tag{12.6}$$

となる流線関数を導入することができ，これによって式 (12.4) は流線関数のみを変数とする以下の方程式となる．

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} = -\overline{\mathbf{V}} \cdot \nabla (\Delta \psi') - \beta \partial \psi' / \partial x \tag{12.7}$$

ここで，$\psi \sim \hat{\psi} \exp(i(kx + ly - \omega t))$ という平面波解を仮定すると，

$$-i\omega(-k^2 - l^2)\hat{\psi} + ik\overline{u}(-k^2 - l^2)\hat{\psi} + il\overline{v}(-k^2 - l^2)\hat{\psi} + \beta ik\hat{\psi} = 0 \tag{12.8}$$

となる．したがって，分散関係式は，

$$\omega = \overline{u}k + \overline{v}l - \frac{\beta k}{k^2 + l^2} \tag{12.9}$$

である．例えば，基本場の南北風 v がない状況を考えると，東西方向の位相速度は，

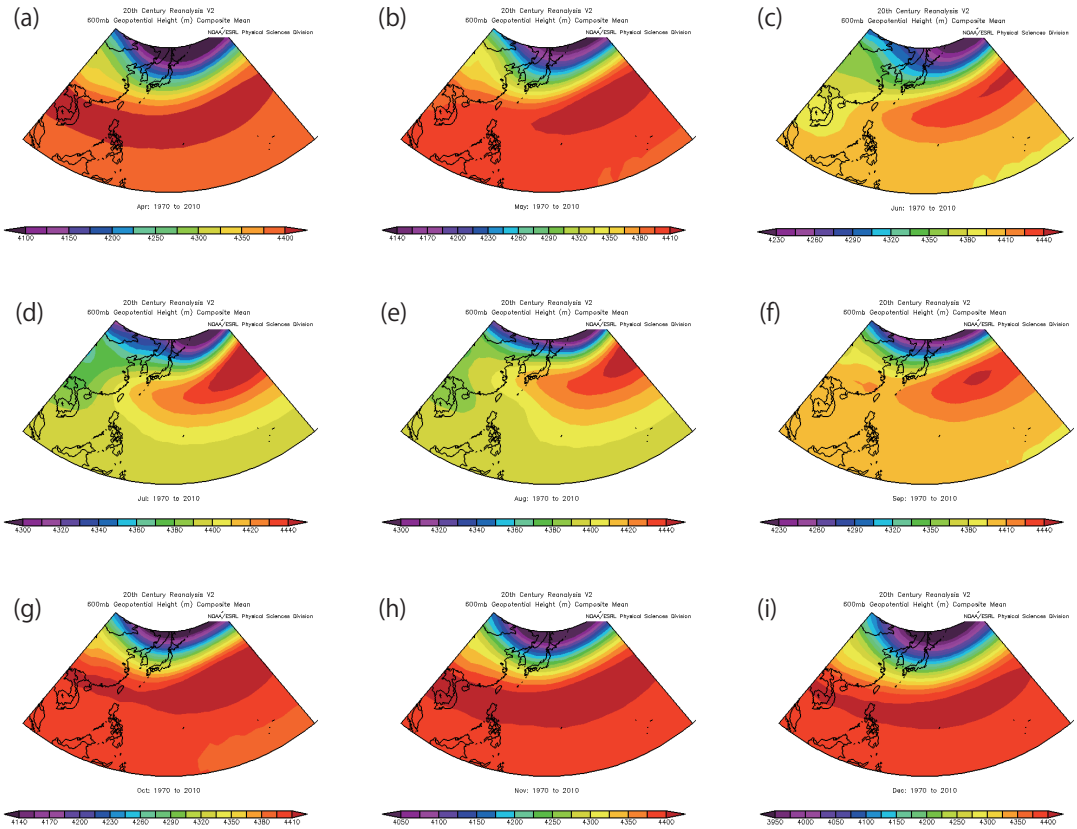

図 12.2: 600 hPa 面におけるジオポテンシャル高度の 1970-2010 年の月別平均値 (NOAA のホームページ; http://www.esrl.noaa.gov/psd/cgi-bin/data/composites/plot20thc.v2.pl で作図). (a)4 月 (b)5 月 (c)6 月 (d)7 月 (e)8 月 (f)9 月 (g)10 月 (h)11 月 (i)12 月

$$\frac{\omega}{k} = \overline{u} - \frac{\beta}{k^2 + l^2} \tag{12.10}$$

となる．このことは，流線関数の擾乱（すなわち台風）を置いたとき，惑星ロスビー波として，β 効果によって渦度の擾乱，すなわち台風は背景流よりも西に向かうことを意味している．ただし，Chan and Williams (1987) は台風の移動については，以下の項で述べる β ジャイア効果と合わせて考えるべきだとしている．

12.5 台風は極を目指す

北西太平洋でできた台風は一般に北に向かう．これは，第一義的には台風が太平洋高気圧など，大規模場が北に台風を動かすような影響によるものだが，台風が渦と渦の相互作用の効果もあると考えられている．渦と渦との相互作用について，定量的に議論をするのは非常に難しいので (詳しくは

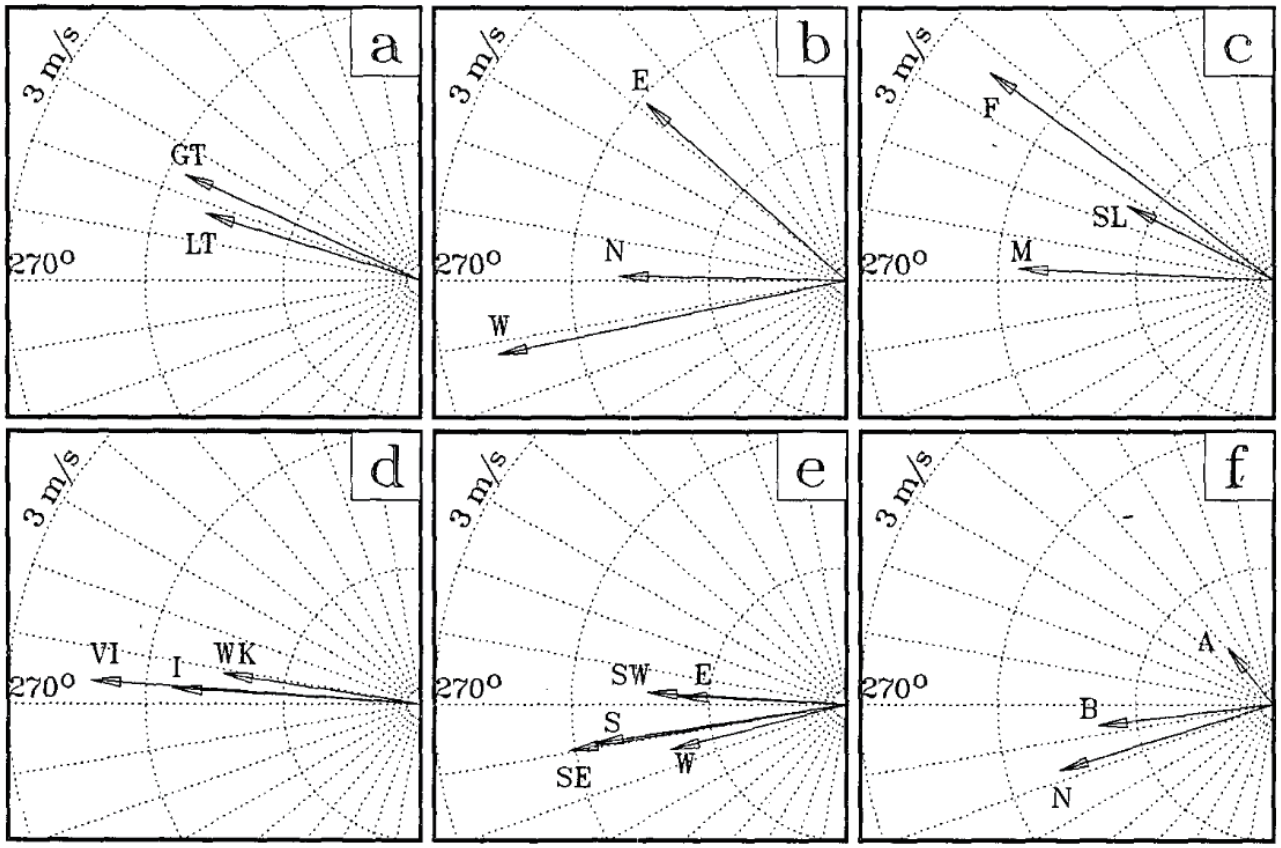

図 12.3: 台風の移動速度から指向流を引き算した際の残差．(a) 緯度による分類 (北緯 20 度以北は GT，以南は LT)．(b) 進行方向による分類 (西進 W，北進 N，東進 E)．(c) 移動速度による分類 (遅い SL，中程度 M，速い F)．(d) 強さによる分類 (弱い WK，強い I，非常に強い VI)．(e) 進行方向による分類 (西進 W，南西進 SW，南進 S，南東進 SE，東進 E)．(f) 転向に対する時期による分類 (転向前 B，転向前後 N，転向後 A)．(a)-(d) は北西太平洋，(e)(f) は南西太平洋域の台風について．Carr and Elsberry (1990) による．

Sutyrin and Flierl (1994) などを参照)，定性的な議論になってしまうが，絶対渦度分布の観点から説明を試みる．

惑星渦度の鉛直成分 (コリオリパラメータ) は，北に行くにしたがって大きくなっていく．そして，そこに台風の相対渦度が乗っかった状態を考える[4]．両者の重ね合わせである絶対渦度は，図 12.4 に示すように，台風の北側 (★で示す地点) における値が南側 (☆で示す地点) の値よりも大きくなる．すなわち，北側には渦度の正偏差があり，南側には渦度の負偏差がある（ここでいう偏差とは，台風中心に対し，接線方向に平均をとったものからの偏差である）．

北半球では，台風の低気圧性循環によって，北側の絶対渦度偏差を西側に輸送し，南側の絶対渦度

[4] 厳密にいうと，台風近傍の相対渦度分布は，中心付近に強い正であり，その外側でいったん弱い負の値になったあと，ゼロに近づくのが一般的だが，ここではその効果は考えず，単純に正の渦度を持つ渦としている．

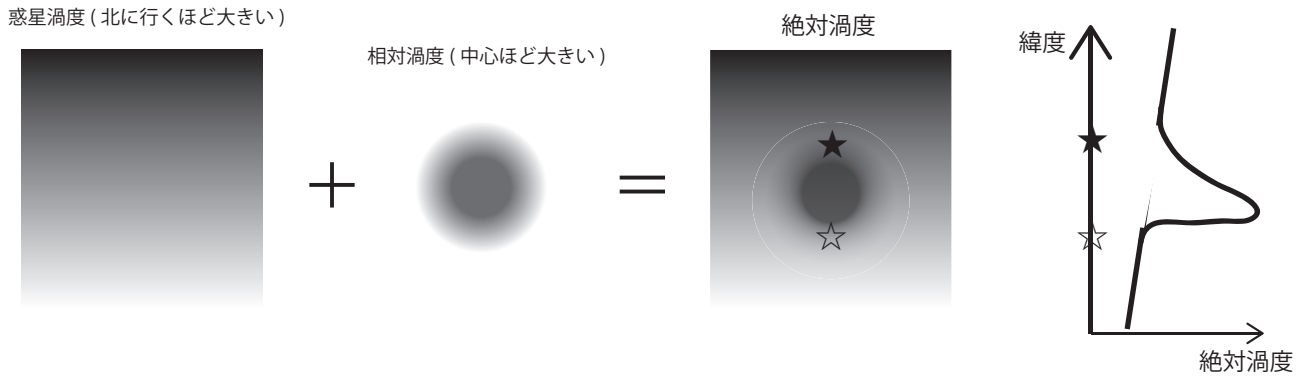

図 12.4: 理想化された台風近傍における惑星渦度・相対渦度・絶対渦度．★印の地点では，絶対渦度が☆印の地点よりも高くなっている．

負偏差を東側へと輸送する．その結果として，絶対渦度の正偏差が台風中心に対して西側へ，絶対渦度の負偏差が東側にできることとなる．このような効果によって，形成される図 12.5 のような絶対渦度偏差の分布のことを β ジャイアと呼ぶ．この β ジャイアは流れの偏差成分に直して考えると，台風を北側へと動かすようなものになっていることがわかる．また，南半球では，絶対渦度偏差の輸送の向きが時計回りとなるので，南極を目指すことになる．これが，台風が極を目指すメカニズムとして考えられているものである．Chan and Williams (1987) は，この効果の移動に対する寄与は，統計的な意味で，観測結果と整合的であるとしている．ただし，個々の台風の移動について，このことを明らかにするのは（偏差が小さいこともあって）容易ではなく，ドロップゾンデを用いてとらえることも難しい．

しばしば，上述のことは「コリオリパラメータ f が移流される」と説明される．しかし，コリオリパラメータ自身は $f = 2\Omega \sin\phi$ として計算されるので緯度 ϕ だけで決まるはずであり，不可思議な説明となっている．私が思うに，混乱のもとは f はコリオリ力の比例係数であると同時に，$f + \zeta$ という形になると絶対渦度と呼ばれる物理量にもなるということである．回転球面上にある渦は，浅水近似のもと流体の厚さが変わらないとして絶対渦度を保存するという性質を持つのだが，β ジャイアに伴う北進は，断じてコリオリパラメータの移流ということではなく，準保存量であるところの絶対渦度の分布が台風自身のなす循環によって変化するからと考えるべきである[5)]．

[5)] f の解釈については，廣田 (2011) も参照のこと．

12.6 藤原効果

12.7 非断熱加熱による寄与

12.8 進路予報の誤差

- 順圧不安定と進路誤差

（執筆中：γ 効果，台風の中心とはどこか？など）

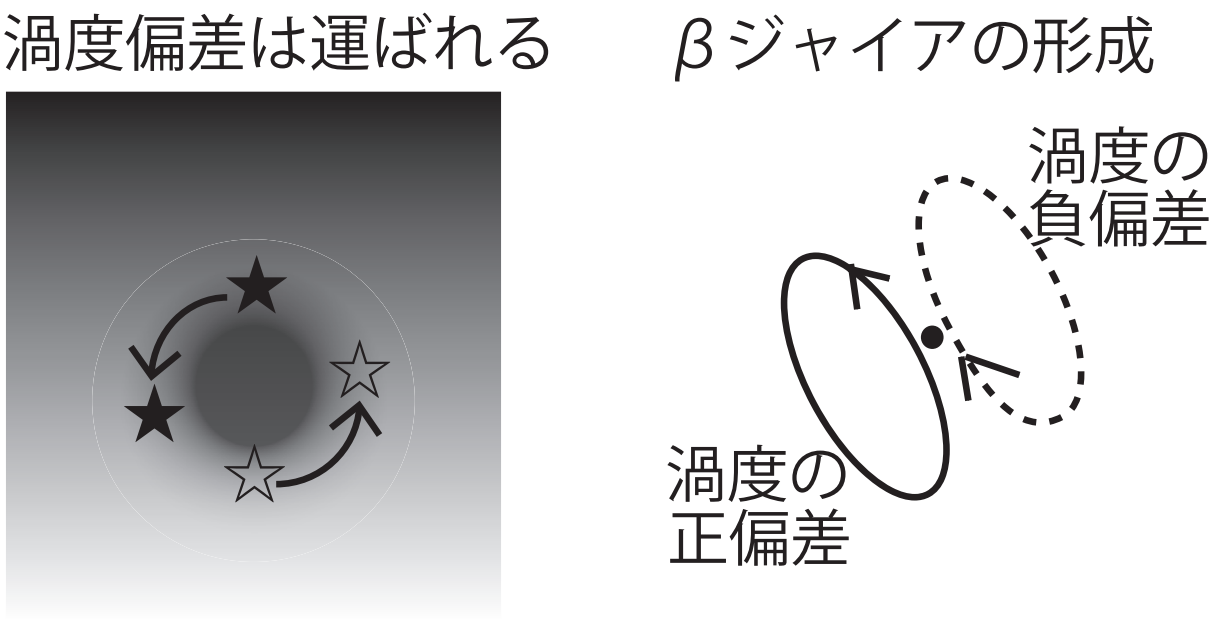

図 12.5: 左図：台風の低気圧性循環に沿って，渦度偏差が反時計回りに運ばれる様子．

第13章　台風の発生

13.1　大まかな話

台風の発生はマルチスケールにわたる複雑な問題で，現時点において,（進路・強度・構造に相対的な意味で）体系的に整理されているわけではない．ただ，暖かく湿った海上で台風が発生しやすいことなど，気候学的にどのような環境場が台風の発生に好都合か、という議論は古くからなされてきた．近年では，数値的研究や台風近傍での高精度稠密観測の進展により，徐々に発生プロセスの研究も進められてきている．その中で，台風が発生する場合には，深い対流が立つことが可能な状況にあり，下層に一定以上の強さの渦があることが分かってきた．そこで，いかにして，対流圏の深い層に及ぶ渦ができあがるのか，という点が議論されるようになり，トップダウン仮説・ボトムアップ仮説が提案されているほか，下層と中層に独立して存在していた渦が重なった際に深い渦となる事例も報告されている．本章では，台風発生をとりまく環境場と発生に関するプロセスの研究について順に紹介しよう．

13.2　発生ポテンシャルと環境場

Gray (1968) は，海面水温が 26.5°C 以上であること，緯度が 5-6° 以上であること，対流圏に深い湿った層が存在することなどが台風の発生につながると述べている．今日では，これらの条件が必ずしも成り立っていなくても，台風が発生する場合があることが知られているが，これらの状態が台風の発生に好都合であることには変わりがないだろう．

その後の研究では，一歩進んで，環境場の状況から台風が発生しやすいどうかを診断する「発生ポテンシャル」(Genesis Potential Index) を提案している．この指数は,

- コリオリパラメータ
- 下層の相対渦度
- 対流圏における水平風の鉛直シアの逆数
- 海洋表層の貯熱量（水深 60m より浅いところで，水温が 26°C 以上の部分を代表している）

- 500hPa 面と地表面における相当温位の差
- 対流圏中層における相対湿度

をもとにして計算される値である．Emanuel et al. (2004) では，Emanuel (1986) などで提案された到達可能最大強度を変数として組み込み，

- 850hPa 面での鉛直渦度
- 600hPa 面での相対湿度
- 850hPa 面と 200hPa 面と
- 対流圏中層における相対湿度
- 台風の到達可能最大強度

から計算される発生ポテンシャルを提案している．

13.3 台風はどのようなプロセスをたどって発達するか？

環境場が整っていることは，台風の発達に好都合ではあるが，上記の条件が満たされると必ず台風ができるというわけではない．擾乱が何らかの形で台風の強さにまで発達する仕組みが必要である．現在に至るまで，発生から発達にいたる過程については議論が続けられている．

軸対称的な構造をした渦状のシステムの発達については 1964 年に Charney と Eliassen によって，第二種の条件付不安定 (Conditional Instability of the Second Kind; 以下 CISK[1)] と略す) と呼ばれる不安定理論が提案されている (Charney and Eliassen, 1964)．このメカニズムは，環境場の対流有効位置エネルギーが非常に高い場合における正のフィードバックメカニズムとして説明される．すなわち，積雲対流によって放出される潜熱が，対流圏下層に低気圧性の擾乱を起こし，そのような擾乱が生じることによって，下層ではエクマンパンピングによる摩擦収束が起き，摩擦収束によって湿潤な気塊が持ち上げられて，凝結に基づく潜熱を放出するというものである．

元来，このメカニズムは発達期の微小擾乱の発展について提案されており，成熟期の台風の維持過程を説明するためのものではなかったのだが，1980 年代初頭まで台風システムの全てのステージを説明するのに広く用いられてきた．しかし，CISK はスケールが小さいほど発達率が大きくなる仕組

[1)] 2)CISK という単語は，資料によって定義が異なるため注意が必要である．Ooyama (1969) の理論や WISHE のメカニズムを含めて CISK と呼ぶ資料もあるが，ここでは混乱を避けるため，Lin (2007) に従い，Charney and Eliassen (1964) が提唱した理論モデルを指して CISK と呼ぶ．

みであり，また，導出の過程で用いられている関係式も観測的な観点から支持されないということが明らかとなってきた (この点に関する総合的な解説は Smith (1997); Lin (2007)).

CISK に変わって，台風の発生に至る様子を説明すると考えられているのが，WISHE メカニズム[2)]である．Rotunno and Emanuel (1987) では，ある程度強い擾乱（ここでは有限振幅擾乱と呼ぶ．最大風速 5-10m/s の渦をイメージする.）を対流圏下層に置いた場合にはやがて全層にわたる深い対流が立ち台風になるが，弱い擾乱から実験を始めると，強くならないことを示した．彼らは，有限振幅擾乱がある場合に海面で水蒸気が十分に大気側へ供給され，その凝結熱がエネルギー源となってさらなる発達を促していると考えた.

それでは，どのようにして有限振幅擾乱が深い層に及ぶのだろうか？この点をめぐって,「ボトムアップ仮説」と「トップダウン仮説」というアイデアが提案され激しい議論が続けている．簡単に言うと，ボトムアップ仮説は強い対流が下層から起こり，渦度を輸送していくというものである．その一方で，トップダウン仮説は，対流圏中層にあった渦が何らかの過程を経て下層に降りてくるというものである．また，近年では，下層にあった渦と中層にあった渦が重なった際に，それが深い渦に発達した事例も知られている．以下では，これらについてもう少し詳しくみていこう.

13.4 ボトムアップ仮説

13.5 トップダウン仮説

13.6 渦の重なり

(執筆中)

[2)]元来，Emanuel (1986) が提案したのは定常状態についてだけなので，WISHE メカニズムという単語を定常状態だけを指して使う人もいるが，Rotunno and Emanuel (1987); Emanuel (1989) などの一連の研究も加え，発生・発達過程まで含めて WISHE と考えている人の方が多いように思う.

付録 A　学生時代の自分からの一問一答

Q. 慣性系って何でしょう？

A. ニュートン法則が当てはまる座標系．力が加わらない限り，物体は等速直線運動を続けます．人に説明するときは，宇宙人がぐるぐるまわる地球を見ている視点だと話しています (地球は公転してるし，銀河系だって回転してるやないかと言われたら「うぬぬ」となりますが，回転角速度は地球の自転に比べて遅いということで許してください)．紛らわしいのは,「慣性不安定」とか「慣性重力波」というときの「慣性」という単語には，回転座標系になったことによって出てくる，というニュアンスがあります．台風の力学を説明する上でも（台風の回転に伴って現れる性質としての）慣性安定性という概念は非常に重要です。は非常にどんな歴史的経緯でこんな紛らわしいことになったのだろう ….

Q. 次々と新しい変数が出てきて大変なのですが...

A. もともとの方程式に存在する変数は風速，気温，気圧，密度だけだったのに，渦度，温位，相当温位，慣性安定度，エントロピー，角運動量，渦位 ··· と新しい変数がどんどん増えていきます．嫌になるのも仕方ありません

Q. 基本場と擾乱とはなんですか？場は場であって，二つに分割できるものではないと思うのですが •••

A. 筆者の考えでは，基本場とは「基本場として定義されたもの」であり，擾乱とは「基本場からの偏差」です．つまりは,「これこれを基本場とする」と誰かが宣言して初めて基本場になります．ある流れ場があったとして，水平一様な状態を基本場とするのも，東西平均を基本場とするのも，時間平均を基本場とするのも，ある計算の結果を基本場とするのも，定義した人のなかでつじつまが合っていればよいのです．ただ，ある基本場を宣言することが，研究の目的に適うかどうか，方程式を解くうえで有用かどうか，解釈がきちんとできるかどうか，ということが重要なのだと思います．

Q. 不安定とか中立モードとか減衰モードがなんなのかわかりません

A.（狭義の）不安定は，ある基本場において，それに加わった微小な擾乱がどんどんと拡大していくということで，中立とは擾乱のサイズが変わらないこと，減衰とは擾乱のサイズが小さくなっていくことを指します．そして，擾乱が拡大していくかどうかは，基本場が擾乱の拡大に向いているかどうかで決まります．その意味で，不安定かそうでないかというのは，ちょっとした擾乱が入っただけで基本場が壊れるか，擾乱が減衰して基本場がそのまま維持されるかどうか，というのを結論として示唆しています．余談ですが，数学的にいえば，このことは，行列の固有値や特異値の大きさと関係しており，また，擾乱が基本場から（擬）エネルギーをもらってくるというものとして議論することもできます．

例えて言えば，仲のよいカップルの場合，ちょっとしたいざこざがあってももとに戻りますが，もう別れかけのカップルの場合，全く同じいざこざが二人の関係を壊すところまで発展します．これが，安定な状態と不安定な状態の違いだといってもよいでしょう．

Q. ロスビー波は西側に伝わると聞いたのに，渦ロスビー波が渦度の高い方を見て右に動くというのがよくわかりません．

A.「ロスビー波」といえば,「β 平面を考えた場合の惑星ロスビー波」を指す，という教科書は少なくありません．この場合，位相速度は西を向くことになります（ただし，群速度は擾乱の構造によって東西どちら向きになるかが異なるので注意）．しかしながら，広義のロスビー波は「基本場の渦位分布が与えられたときの，渦位の擾乱の振る舞いとしての波動」を指しています．本文ではこちらの定義を採用し，狭義のロスビー波については,「惑星ロスビー波」と記すことにしています．広義のロスビー波には，ほかに地形性ロスビー波や水平鉛直断面におけるロスビー波もあります．また，β 平面上での議論のようにある場所の近傍での平面波を考えるのではなく，球面全体が揺れるモードを考えることもできます．このようなものは，ロスビー・ハウルビッツ波と呼ばれたりしています．

付録B　メソ気象でよく使われる変数

B.1　エクスナー関数

メソスケールの現象を扱うときには，気圧の代わりに，以下で定義されるエクスナー関数と呼ばれる無次元化された気圧を用いることが多い．

$$\pi \equiv \left(\frac{p_0}{p}\right)^{(R/C_p)} \tag{B.1}$$

エクスナー関数は，$\pi\theta = T$ の関係を満たしている．この関数を用いて，傾度風の風速を表すと，

$$v_G = -\frac{fr}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2r^2}{4} + rC_p\theta_0\frac{\partial \pi_G}{\partial r}} \tag{B.2}$$

となる．

B.1.1　渦度ベクトル

円筒座標系における相対渦度ベクトルは，以下のように表される（円筒座標系における任意のベクトル場の回転について調べてみよ）．

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} - \frac{u}{r\phi}\right) \tag{B.3}$$

惑星渦度ベクトルをこれに加える場合には

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, f + \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r} - \frac{u}{r\phi}\right) \tag{B.4}$$

軸対称性を仮定すると，相対渦度ベクトルは

$$\boldsymbol{\omega} = \left(-\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right) \tag{B.5}$$

絶対渦度ベクトルは

$$\boldsymbol{\omega} = \left(-\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, f + \frac{1}{r}\frac{\partial (rv)}{\partial r}\right) \tag{B.6}$$

となる．

以下，本解説において，単に相対渦度という場合にはこのうち鉛直渦度

$$\zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv)}{\partial r} \tag{B.7}$$

のことを指すものとする．

付録C　必要となる数学知識

C.1　偏微分の基礎

偏微分において式変形を施す際に重要なことは，ある関数がどの変数を独立変数とするかという点である．いわゆる連鎖律を含む変数変換は，基礎的であるが非常に重要である．以下に示すような条件での変形が可能である．

(1)$g = g(f(x))$ であるとき，

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} \tag{C.1}$$

(2)$h = h(f(x), g(x))$ であるとき，$g(x)$ が一定値ならば，

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_g = \left(\frac{dh}{df}\right)_g \left(\frac{df}{dx}\right)_g \tag{C.2}$$

(3)M が x, y の関数ならば，

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_M = -\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_y \Big/ \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x \tag{C.3}$$

[解説] 次の式について考える．

$$\delta M = \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_y \delta x + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x \delta y \tag{C.4}$$

ここで，$\delta M = 0$ の条件のもとで，すなわち，等 M 面での偏微分を考える．このとき，$\delta y/\delta x$ は δx だけ動かした時の δy の変化，すなわち偏微分に相当するから，$(\partial y/\partial x)_M$ に等しくなる．

(4)$\rho = \rho\,(r, z) = \rho\,(r, p)$ においては，以下の関係式が成り立つ．

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_z + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_r \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_p \tag{C.5}$$

C.2　二階偏微分方程式

一般に，二階偏微分方程式

$$a\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = d \tag{C.6}$$

は，係数の値によって，

$$b^2 - ac < 0,\ \text{楕円型} \tag{C.7}$$

$$b^2 - ac = 0,\ \text{双曲型} \tag{C.8}$$

$$b^2 - ac > 0,\ \text{放物型} \tag{C.9}$$

のように分類されるが，楕円型である場合には解の一意性が保証される．すなわち，式 (3.3) において，右辺の各項が与えられた場合，適当な境界条件が与えられて，かつ，楕円型方程式となる条件を満たす領域においては，緩和法と呼ばれる方法などを用いて，質量流線関数 ψ を計算することができる．

C.3　ベッセル関数

（本節及び次節の内容は，主に Sneddon (1972) に基づいている.）

円筒座標系 (r, ϕ, z) におけるラプラス方程式は以下の式で書かれる（ここでは，必ずしも軸対称性を仮定していない）．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{C.10}$$

ここで，以下のようなノーマル・モードの解について調べることにする．

$$u(r, \phi, z) = R(r)e^{-\xi z + i\nu\phi} \tag{C.11}$$

すると，式 (C.10) は以下のように変形される．

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dR}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) R = 0 \tag{C.12}$$

ただし，$t = \xi r$ である．ここで，式 (C.12) はベッセルの微分方程式と呼ばれる．一般に，この方程式の特殊解のことをベッセル関数といい，ν を次数と呼ぶ．ベッセル関数は 2 階の線形微分方程式であり，線形独立な 2 つの解が存在するが，様々な解の表現が議論されている．それらは，第 1 種，第 2 種，第 3 種ベッセル関数などと呼ばれる．第 3 種ベッセル関数はハンケル関数とも呼ばれ，円筒波の伝播の解を表現するのに用いられる．

C.4　ハンケル変換

ある関数 $f(x)$ を以下のように積分を利用して $F(k)$ に変換することを考える（ここでは，便宜上 k のことを波数と呼ぶ）．

$$F(k) = \int_a^b f(t)K(k,t)dt \tag{C.13}$$

このように，関数 $K(k,t)$ を掛けて変換を行うことを積分変換といい，$K(k,t)$ は「核」と呼ばれる．フーリエ変換やラプラス変換は積分変換の一種であり，それぞれ $K(k,t) = e^{-itk}$（文献によっては $K(k,t) = e^{-2\pi itk}$ などとも），$K(k,t) = e^{-tk}$ としたものである．多くの場合，逆変換も定義される．

積分変換を行うことの利点のひとつは，もともとの方程式（系）で解を得るのが難しい場合でも，積分変換を行った方程式（系）では，しばしば容易に解が得られるという点にある．もし，積分変換を施した系で解が得られたならば，逆変換を用いて元の方程式系での解に直すこともできる．ハンケル変換（フーリエ・ベッセル変換とも呼ばれる）は，積分変換の中でも円筒座標系の解に密接に関連したものであり，ベッセル関数を用いて以下のように表される．

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(r)J_\nu(kr)rdr \tag{C.14}$$

逆ハンケル変換は，以下のように表される．

$$f_\nu(r) = \int_0^\infty F_\nu(k)J_\nu(kr)kdr \tag{C.15}$$

ここで，J_ν は次数が $\nu(\nu > -1/2)$ のベッセル関数である．基底関数は以下のように直交基底となっていることが確認できる．

$$\int_0^\infty J_\nu(kr)J_\nu(k'r)rdr = \frac{\delta(k-k')}{k} \tag{C.16}$$

ここで，$\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数である．

ハンケル変換には，いくつかの性質があるが，ここでは基礎的なものと本文で必要となる内容に限定して述べる．

(1) 次数が 0 のハンケル変換は，回転対称な関数の二次元フーリエ変換と同じである．

[証明] 二次元関数 $f(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換について考える．

$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\pi}\int\int f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} \tag{C.17}$$

ここで，極座標系 (r,θ) を考え，ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\theta = 0$ の軸上の値をとるとすれば，このフーリエ変換は，

$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{r=\infty}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} f(\boldsymbol{x})e^{-ikr\cos\theta}rdrd\theta \tag{C.18}$$

θ はベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{k}$ との間にある角度である．関数 f が軸対称であれば，角度 θ に依存しないので，θ に関して積分すると，以下のように書き直せる．

$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{r=0}^{r=\infty} f(r)J_0(kr)rdr \tag{C.19}$$

(2) 導関数 f' のハンケル変換に関して，

$$f(r) = O(r^{-\nu-1}), r \to 0 \tag{C.20}$$

ならば，以下の式が成り立つ．

$$\mathcal{H}_\nu \left[r^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial r}(r^{1-\nu} f(r)); k \right] = -k\mathcal{H}_{\nu-1}\left[f(r); k\right] \tag{C.21}$$

$$\mathcal{H}_\nu \left[r^{-\nu-1} \frac{\partial}{\partial r}(r^{1+\nu} f(r)); k \right] = k\mathcal{H}_{\nu+1}\left[f(r); k\right] \tag{C.22}$$

ただし，$\mathcal{H}_\nu[f; k]$ は，関数 f に次数を ν としたハンケル変換を作用させることを表すとする．

特に，次数 1 と次数 0 のときを考えると，

$$\mathcal{H}_1 \left[\frac{\partial f(r)}{\partial r}; k \right] = -k\mathcal{H}_0\left[f(r); k\right] \tag{C.23}$$

$$\mathcal{H}_0 \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f(r)); k \right] = k\mathcal{H}_{\nu+1}\left[f(r); k\right] \tag{C.24}$$

[証明] Sneddon (1972)(5.4 節) を参照.

C.5 基本場に二次循環を含めた場合の慣性周期

不安定について考えるために，代入を進めて解の性質を調べてもよいが，少しスマートに右辺に現れた行列から固有振動数を計算する．一般に，2×2 行列 $\mathbf{A}$ の特性方程式は

$$det|\mathbf{A} - k\mathbf{I}| = 0 \to k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{C.25}$$

である．解は，

$$\frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2} \tag{C.26}$$

から得ることができる．壁雲の中では根号の中身が正となることから，$\overline{u}, \overline{v}, r, f$ を固定すると，

$$\left(f + \frac{\overline{v}}{r} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial r}\right)\left(f + \frac{2\overline{v}}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} - \frac{\overline{u}}{r}\right) \tag{C.27}$$

$$= I^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} - \frac{\overline{u}}{r}\right) \tag{C.28}$$

謝辞

集中講義において，台風にまつわる多くの内容を分かりやすく教えていただいた Yu-Qing Wang 先生，本文章の誤りを指摘していただいた加藤亮平様，山崎哲様，辻宏樹様，松尾健太様，川端康弘様，塚田大河様に感謝申し上げます.

関連図書

Anthes, R. and S. Chang, 1978: Response of the hurricane boundary layer to changes of sea surface temperature in a numerical model. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1240–1255.

Bell, M. and M. Montgomery, 2008: Observed structure, evolution, and potential intensity of Category 5 Hurricane Isabel (2003) from 12 to 14 September. *Mon. Wea. Rev.*, **136 (6)**, 2023–2046.

Bister, M. and K. Emanuel, 1998: Dissipative heating and hurricane intensity. *Meteor. Atmos. Phys.*, **65 (3)**, 233–240.

Bryan, G., 2008: On the computation of pseudoadiabatic entropy and equivalent potential temperature. *Mon. Wea. Rev.*, **136 (12)**, 5239–5245.

Bryan, G. and R. Rotunno, 2009a: The influence of near-surface, high-entropy air in hurricane eyes on maximum hurricane intensity. *J. Atmos. Sci.*, **66 (1)**, 148–158.

Bryan, G. and R. Rotunno, 2009b: The maximum intensity of tropical cyclones in axisymmetric numerical model simulations. *Mon. Wea. Rev.*, **137 (6)**, 1770–1789.

Bryan, G. and R. Rotunno, 2009c: Evaluation of an analytical model for the maximum intensity of tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **66 (6)**, 3042–3060.

Carr, L. and R. Elsberry, 1990: Observational evidence for predictions of tropical cyclone propagation relative to environmental steering. *J. Atmos. Sci.*, **47 (4)**, 542–546.

Chan, J., 2010: Movement of tropical cyclones. *Global Perspectives on Tropical Cyclones: From Science to Mitigation*, World Scientific Publishing, 133–148.

Chan, J. C. and R. Williams, 1987: Analytical and numerical studies of the beta-effect in tropical cyclone motion. part i: Zero mean flow. *J. Atmos. Sci.*, **44 (9)**, 1257–1265.

Charney, J. and A. Eliassen, 1964: On the growth of the hurricane depression. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 68–75.

Emanuel, K., 1986: An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part I: Steady-state maintenance. *J. Atmos. Sci.*, **43 (6)**, 585–605.

Emanuel, K., 1988: Observational evidence of slantwise convective adjustment. *Mon. Wea. Rev.*, **116 (9)**, 1805–1816.

Emanuel, K., 1989: The finite-amplitude nature of tropical cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **46 (22)**, 3431–3456.

Emanuel, K., 1995: Sensitivity of tropical cyclones to surface exchange coefficients and a revised steady-state model incorporating eye dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **52 (22)**, 3969–3976.

Emanuel, K., 1997: Some aspects of hurricane inner-core dynamics and energetics. *J. Atmos. Sci.*, **54 (8)**, 1014–1026.

Emanuel, K., 2005: *Divine wind: The history and science of hurricanes*. Oxford University Press, USA, 13–15 pp.

Emanuel, K., C. DesAutels, C. Holloway, and R. Korty, 2004: Environmental control of tropical cyclone intensity. *J. Atmos. Sci.*, **61 (7)**, 843–858.

Gray, W., 1968: Global view of the origin of tropical disturbances and storms. *Mon. Wea. Rev.*, **96 (10)**, 669–700.

Guinn, T. and W. Schubert, 1993: Hurricane spiral bands. *J. Atmos. Sci.*, **50 (20)**, 3380–3380.

Hawkins, H. and D. Rubsam, 1968: Hurricane Hilda, 1964. II. Structure and budgets of the hurricane on October 1, 1964. *Mon. Wea. Rev.*, **96 (9)**, 617–636.

Holland, G. and R. Merrill, 1984: On the dynamics of tropical cyclone structural changes. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **110 (465)**, 723–745.

Holton, J., 1992: An introduction to dynamic meteorology (third edition). 67–69 pp.

Itano, T. and H. Ishikawa, 2002: Effect of negative vorticity on the formation of multiple structure of natural vortices. *J. Atmos. Sci.*, **59 (22)**, 3254–3262.

Ito, K., Y. Ishikawa, Y. Miyamoto, and T. Awaji, 2011: Short-timescale process in a mature hurricane as a response to sea surface fluctuations. *J. Atmos. Sci.*, **68 (10)**, 2250–2272.

Jones, S. C., 1995: The evolution of vortices in vertical shear. i: Initially barotropic vortices. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **121 (524)**, 821–851.

Kepert, J., 2001: The dynamics of boundary layer jets within the tropical cyclone core. Part I: Linear theory. *J. Atmos. Sci.*, **58 (17)**, 2469–2484.

Kepert, J. and Y. Wang, 2001: The dynamics of boundary layer jets within the tropical cyclone core. Part II: Nonlinear enhancement. *J. Atmos. Sci.*, **58 (17)**, 2485–2501.

Kepert, J. D., 2006a: Observed boundary layer wind structure and balance in the hurricane core. part i: Hurricane georges. *J. Atmos. Sci.*, **63 (9)**, 2169–2193.

Kepert, J. D., 2006b: Observed boundary layer wind structure and balance in the hurricane core. part ii: Hurricane mitch. *J. Atmos. Sci.*, **63 (9)**, 2194–2211.

Kossin, J. and W. Schubert, 2004: Mesovortices in hurricane isabel. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **85**, 151–153.

Kwon, Y. C. and W. M. Frank, 2005: Dynamic instabilities of simulated hurricane-like vortices and their impacts on the core structure of hurricanes. part i: Dry experiments. *J. Atmos. Sci.*, **62 (11)**, 3955–3973.

Lin, I., et al., 2003: New evidence for enhanced ocean primary production triggered by tropical cyclone. *Geophys. Res. Lett.*, **30 (13)**, 1718, doi:10.1029/2003GL017 141, 2003.

Lin, Y., 2007: *Mesoscale dynamics*. Cambridge Univ Pr, 347–348 pp.

Marks, F. and R. Houze, 1987: Inner core structure of Hurricane Alicia from airborne Doppler radar observations. *J. Atmos. Sci.*, **44 (9)**, 1296–1317.

Mitsuta, Y., N. Monji, and H. Ishikawa, 1987: On the multiple structure of atmospheric vortices. *J. Geophys. Res.*, **92 (D12)**, 14 827–14 831.

Möller, J. D. and M. T. Montgomery, 2000: Tropical cyclone evolution via potential vorticity anomalies in a three-dimensional balance model. *J. Atmos. Sci.*, **57 (20)**, 3366–3387.

Montgomery, M., M. Bell, S. Aberson, and M. Black, 2006: Hurricane Isabel (2003): New insights into the physics of intense storms. Part I: Mean vortex structure and maximum intensity estimates. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **87 (10)**, 1335–1347.

Montgomery, M. and R. Kallenbach, 1997: A theory for vortex rossby-waves and its application to spiral bands and intensity changes in hurricanes. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123 (538)**, 435–465.

Neumann, C., 1979: On the use of deep-layer mean geopotential height fields in statistical prediction of tropical cyclone motion. Preprints. *Sixth Conf. on Probability and Statistics in Atmosphere Sciences*, 32–38.

Niwa, Y. and T. Hibiya, 1997: Nonlinear processes of energy transfer from traveling hurricanes to the deep ocean internal wave field. *J. Geophys. Res.*, **102 (C6)**, 12 469.

Ooyama, K., 1969: Numerical simulation of the life cycle of tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **26 (1)**, 3–40.

Palmén, E. and H. Riehl, 1957: Budget of angular momentum and energy in tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **14**, 150–160.

Persing, J. and M. Montgomery, 2003: Hurricane superintensity. *J. Atmos. Sci.*, **60 (19)**, 2349–2371.

Pike, A., 1985: Geopotential heights and thicknesses as predictors of atlantic tropical cyclone motion and intensity. *Mon. Wea. Rev.*, **113 (6)**, 931–939.

Price, J., 1983: Internal wave wake of a moving storm. I: Scales, energy budget and observations. *J. Phys. Oceanogr.*, **13 (6)**, 949–965.

Reasor, P. D., M. T. Montgomery, and L. D. Grasso, 2004: A new look at the problem of tropical cyclones in vertical shear flow: Vortex resiliency. *J. Atmos. Sci.*, **61 (1)**, 3–22.

Rotunno, R. and K. Emanuel, 1987: An air–sea interaction theory for tropical cyclones. Part II: Evolutionary study using a nonhydrostatic axisymmetric numerical model. *J. Atmos. Sci.*, **44 (3)**, 542–561.

Rozoff, C., J. Kossin, W. Schubert, and P. Mulero, 2009: Internal control of hurricane intensity variability: The dual nature of potential vorticity mixing. *J. Atmos. Sci.*, **66 (1)**, 133–147.

Sawada, M. and T. Iwasaki, 2007: Impacts of ice phase processes on tropical cyclone development. *J. Meteor. Soc. Japan*, **85 (4)**, 479–494.

Sawada, M. and T. Iwasaki, 2010: Impacts of evaporation from raindrops on tropical cyclones. Part II: Features of rainbands and asymmetric structure. *J. Atmos. Sci.*, **67 (1)**, 84–96.

Schade, L. and K. Emanuel, 1999: The ocean's effect on the intensity of tropical cyclones: Results from a simple coupled atmosphere–ocean model. *J. Atmos. Sci.*, **56 (4)**, 642–651.

Schecter, D. and M. Montgomery, 2007: Waves in a cloudy vortex. *J. Atmos. Sci.*, **64 (2)**, 314–337.

Schubert, W., J. Hack, S. Dias, and S. Fulton, 1980: Geostrophic adjustment in an axisymmetric vortex. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1464–1484.

Schubert, W., M. Montgomery, R. Taft, T. Guinn, S. Fulton, J. Kossin, and J. Edwards, 1999: Polygonal eyewalls, asymmetric eye contraction, and potential vorticity mixing in hurricanes. *J. Atmos. Sci.*, **56 (9)**, 1197–1223.

Shapiro, L. and H. Willoughby, 1982: The response of balanced hurricanes to local sources of heat and momentum. *J. Atmos. Sci.*, **39 (2)**, 378–394.

Smith, R., 1997: On the theory of CISK. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123**, 407–418.

Smith, R., M. Montgomery, and S. Vogl, 2008: A critique of Emanuel's hurricane model and potential intensity theory. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **134**, 551–561.

Sneddon, I., 1972: *The use of integral transforms*, Vol. 539. McGraw-Hill.

Stull, R., 1988: *An introduction to boundary layer meteorology.* Springer, 666p.

Sutyrin, G. G. and G. R. Flierl, 1994: Intense vortex motion on the beta plane: Development of the beta gyres. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 773–790.

Wang, Y., 2002: Vortex rossby waves in a numerically simulated tropical cyclone. part ii: The role in tropical cyclone structure and intensity changes*. *J. Atmos. Sci.*, **59 (7)**, 1239–1262.

Wang, Y. and J. Xu, 2010: Energy production, frictional dissipation, and maximum intensity of a numerically simulated tropical cyclone. *J. Atmos. Sci.*, **67 (1)**, 97–116.

Willoughby, H., 1995: Mature structure and evolution. *Global Perspectives on Tropical Cyclones*, R. Elsberry, Ed., World Scientific Publishing, 21–42.

Wu, C., K. Chou, Y. Wang, and Y. Kuo, 2006: Tropical cyclone initialization and prediction based on four-dimensional variational data assimilation. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 2383–2395.

Yablonsky, R. and I. Ginis, 2009: Limitation of one-dimensional ocean models for coupled hurricane-ocean model forecasts. *Mon. Wea. Rev.*, **137 (12)**, 4410–4419.

Yang, B., Y. Wang, and B. Wang, 2007: The Effect of Internally Generated Inner-Core Asymmetries on Tropical Cyclone Potential Intensity. *J. Atmos. Sci.*, **64 (4)**, 1165–1188.

Yau, M., Y. Liu, D. Zhang, and Y. Chen, 2004: A multiscale numerical study of hurricane andrew (1992). part vi: Small-scale inner-core structures and wind streaks. *Monthly weather review*, **132 (6)**, 1410–1433.

Zedler, S., P. Niiler, D. Stammer, E. Terrill, and J. Morzel, 2009: Ocean's response to Hurricane Frances and its implications for drag coefficient parameterization at high wind speeds. *J. Geophys. Res*, **114**, C04 016, doi:10.1029/2008JC005 205.

Zhang, J., R. Rogers, D. Nolan, and F. Marks Jr, 2011: On the characteristic height scales of the hurricane boundary layer. *Mon. Wea. Rev.*, **139 (8)**, 2523–2535.

関連図書

小倉義光, 1997: メソ気象の基礎理論. 東京大学出版会, 71–80.

林祥介, 1996: 流体力学. 地球惑星科学 6: 地球連続体力学, 39–97.

廣田勇, 2011: 渦のいろいろ. 天気, **58(11), 63–67.**