

台風物理学入門

辻野 智紀 (TSUJINO, Satoki)

名古屋大学 宇宙地球環境研究所

2018/03/23

本日のお品書き

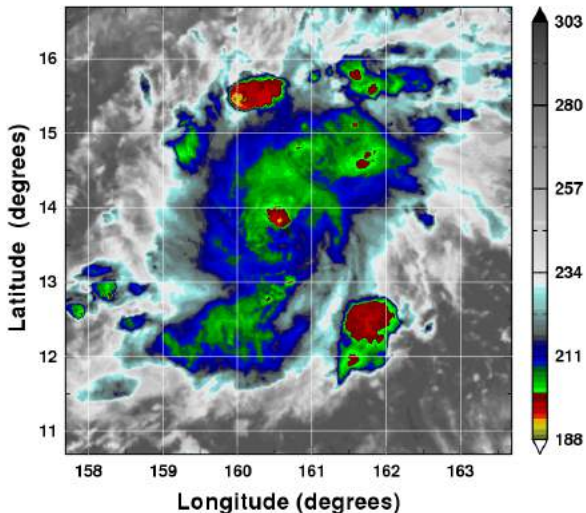
- 台風力学研究の意義 (台風の発達という観点から)
- 大気力学基礎
- 成熟台風の構造
- 台風の発達過程

熱帯低気圧とは

- 熱帯あるいは亜熱帯海洋上で発生.
- 組織化した深い対流と地表面での明瞭な低気圧性循環を伴う.
- 前線を持たない「暖気核」低気圧システム.
- 強風半径は約数百 km, 強い対流と暴風の半径は約 100 km 程度.
- 半径約 200 km 以内の平均降水強度は約 100 mm d^{-1} , 最大降水強度は 500 mm d^{-1} 超.
- 総観スケール, メソスケール両方の見方が可能.

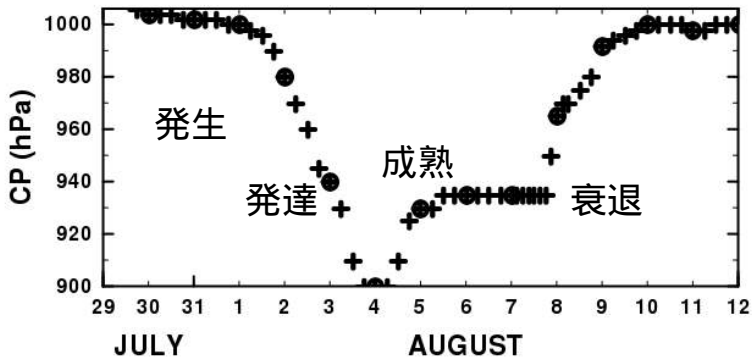
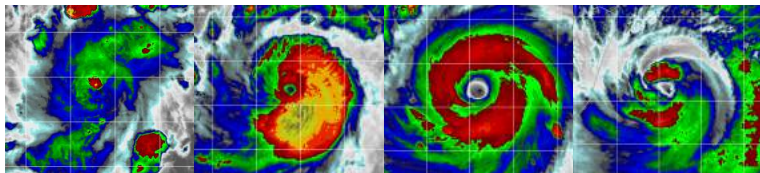
Lin (2008) 9 章より.

20150730000000-B13



ひまわり 8 号で見られた 2015 年台風 Soudelor のアニメーション.

台風的一生



2015 年台風 Soudelor の中心気圧.

熱帯低気圧による災害 (大雨・洪水・地すべり)



- (左上) 2011 年台風 12 号での土砂崩れ (PASCO)
- (左下) 2004 年台風 23 号での洪水 (豊岡市)
- (右上) 2015 年常総市の浸水 (内閣府)

熱帯低気圧による災害 (強風)



2015 年台風 13 号による強風被害 (琉球朝日放送)



1991 年台風 19 号によるリンゴの落果被害 (りんご大学)

熱帯低気圧による災害 (高潮)



(左上) 1999 年台風 18 号による有明海高潮被害
(国土交通省)

(左下) 2016 年台風 14 号による台湾港湾被害
(フォーカス台湾)

(右上) 2011 年台風 30 号によるフィリピン高潮被害 (Roeber and Bricker 2015 Nature Com.).

熱帯低気圧の分類 (強度別)

日本では (10-min 平均)

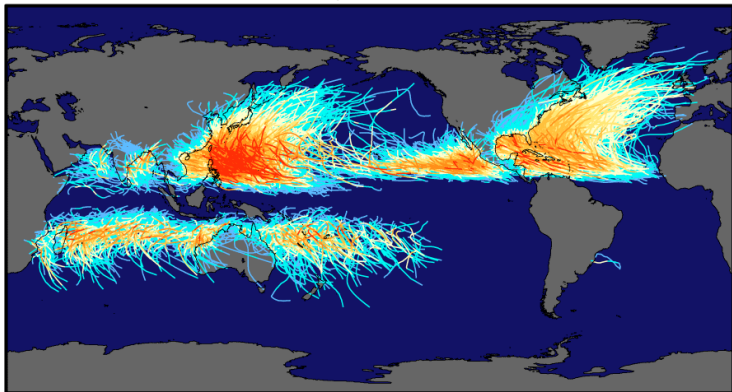
Tropical Depression (TD)	$V_{\max} \leq 17 \text{ m s}^{-1}$
Tropical Storm (TS)	$18 \text{ m s}^{-1} \leq V_{\max} \leq 24 \text{ m s}^{-1}$
Severe Tropical Storm	$25 \text{ m s}^{-1} \leq V_{\max} \leq 32 \text{ m s}^{-1}$
Typhoon	$33 \text{ m s}^{-1} \leq V_{\max} \leq 43 \text{ m s}^{-1}$
Very Strong Typhoon	$44 \text{ m s}^{-1} \leq V_{\max} \leq 53 \text{ m s}^{-1}$
Violent Typhoon	$V_{\max} \geq 54 \text{ m s}^{-1}$

アメリカでは (1-min 平均)

Tropical Depression (TD)	$V_{\max} \leq 17 \text{ m s}^{-1}$
Tropical Storm (TS)	$18 \text{ m s}^{-1} \leq V_{\max} \leq 32 \text{ m s}^{-1}$
Hurricane (Cat. 1-2)/Typhoon	$V_{\max} \geq 33 \text{ m s}^{-1}$
Major Hurricane (Cat. 3-5)	$V_{\max} \geq 50 \text{ m s}^{-1}$
Super Typhoon	$V_{\max} \geq 67 \text{ m s}^{-1}$

熱帯低気圧の分類 (出身地別)

Tracks and Intensity of All Tropical Storms



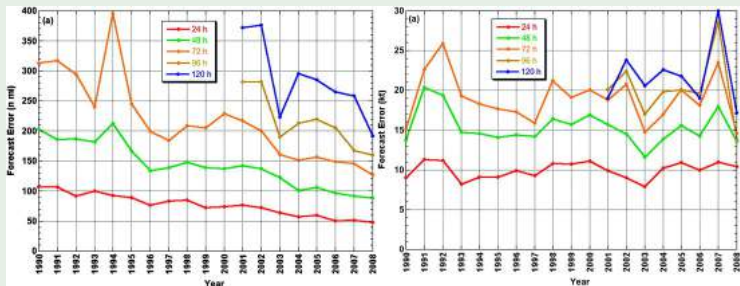
Saffir-Simpson Hurricane Intensity Scale

2006年9月までの期間で 17 m s^{-1} 以上の風速をもつ熱帯低気圧の発生位置と経路 (NASA ホームページ, Image by Robert A. Rohde).

台風の前報成績

- TC は地表付近で強風を伴うため、その強度変化や進路の予測は気象学 (大気科学) における長年の研究テーマ。
- 進路予報はある程度改善の傾向。
- 強度予報は相対的に改善が見られない...

台風予報の現状



アメリカハリケーンセンター (NHC) による GFS (全球数値モデル) を用いたハリケーンの進路予報 (左) と強度予報 (右) の変遷 (Rappaport et al., 2009)。

台風力学研究の意義

台風強度の予報がよくなるには

- ⇒ 数値シミュレーションでの台風強度が観測をよく再現する.
 - ⇒ 現実の台風強度を再現できる物理過程が数値モデルに含まれる.
or 現実の台風強度を再現できる状態が初期値に含まれる.
 - ⇒ 再現のために必要な物理・状態が既知である. ← ココ!
- 強度変化のメカニズムを理解する. \approx メカニズムを駆動するのに必要な物理・状態がわかる.
 - 台風の強度変化におけるメカニズム理解は力学的な観点に基づく.

台風力学研究は

- 台風強度変化のメカニズムを理解する上で重要.
- 数値モデルによる強度予報の改善に貢献.

基礎方程式系

運動量保存則:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \nabla \Phi + \mathbf{F},$$

熱力学第一法則:

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = Q,$$

質量保存則:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

熱力学の状態関係:

$$\rho = \rho(p, T, q_x),$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

熱帯低気圧を記述する基礎方程式系

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \left(f + \frac{v}{r} \right) v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \left(f + \frac{v}{r} \right) u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \lambda} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z,$$

熱力学方程式

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \dot{Q},$$

連続の式

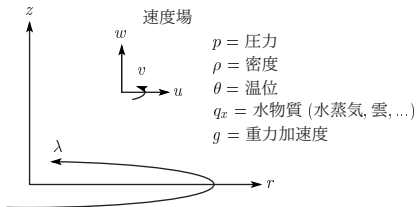
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho r u)}{r \partial r} - \frac{\partial(\rho v)}{r \partial \lambda} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z},$$

状態方程式

$$\rho = \rho(p, T, q_x), \quad (T = T(p, \theta)),$$

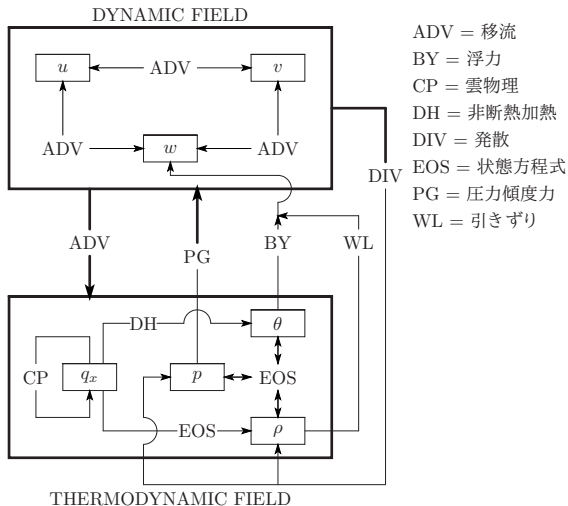
水物質保存式

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} = -u \frac{\partial q_x}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial q_x}{\partial \lambda} - w \frac{\partial q_x}{\partial z} + CP.$$



基礎方程式の座標系.

熱帯低気圧を記述する方程式系

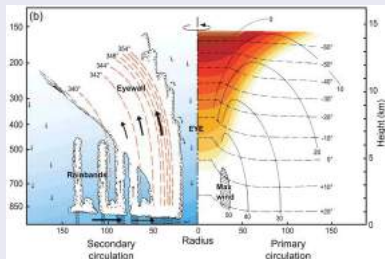


支配方程式系における各物理量の相関図.

熱帯低気圧の見方 (= 置かれる仮定)

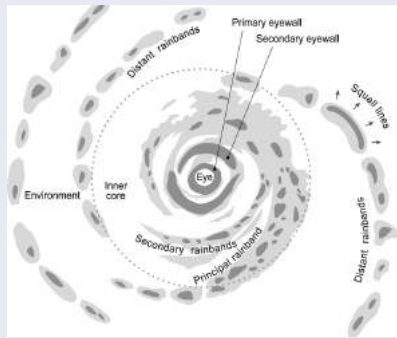
バランス渦的視点

接線方向の一様性を仮定
($\partial/\partial\lambda = 0$).

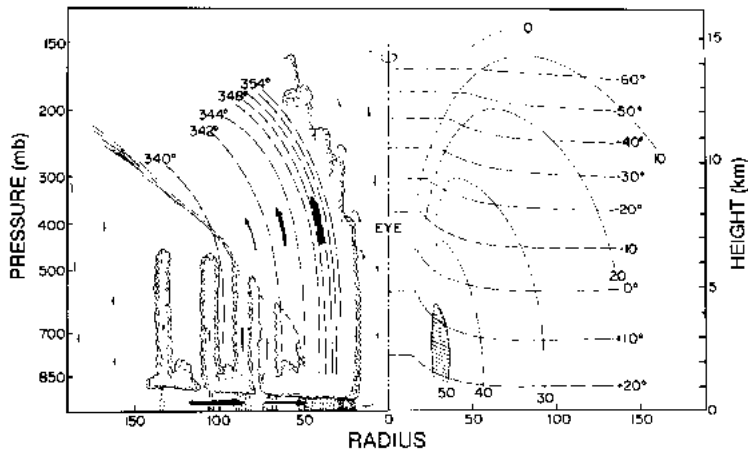


順圧渦的視点

鉛直方向の一様性を仮定
($\partial/\partial z = 0$).

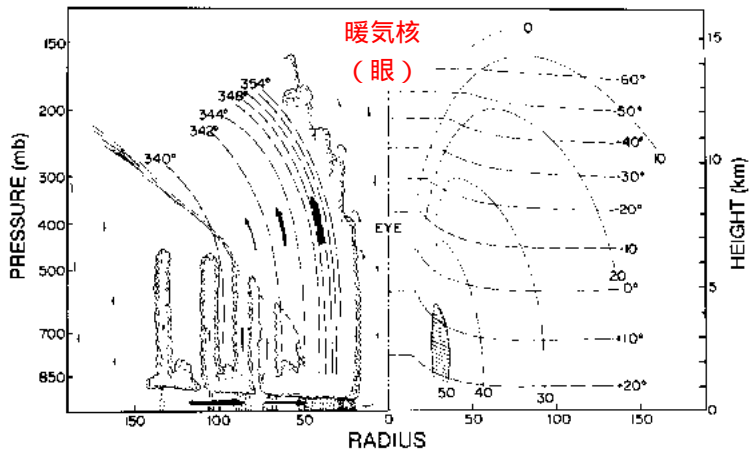


成熟期の熱帯低気圧構造



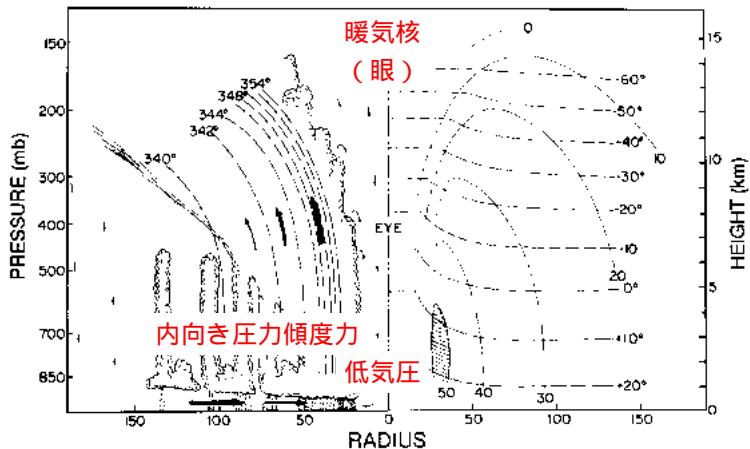
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



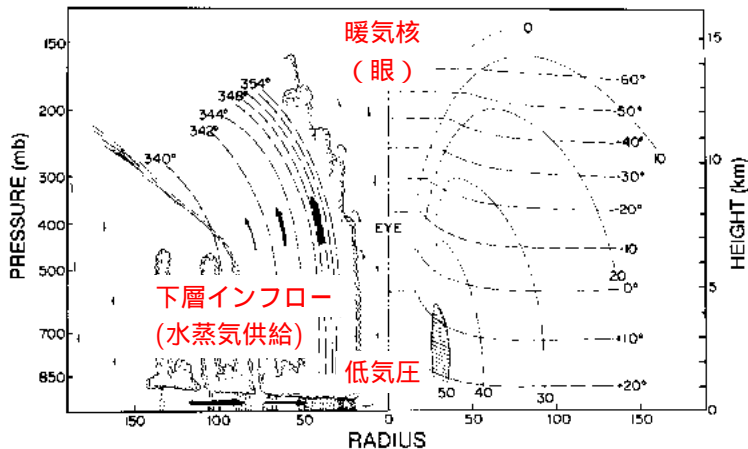
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



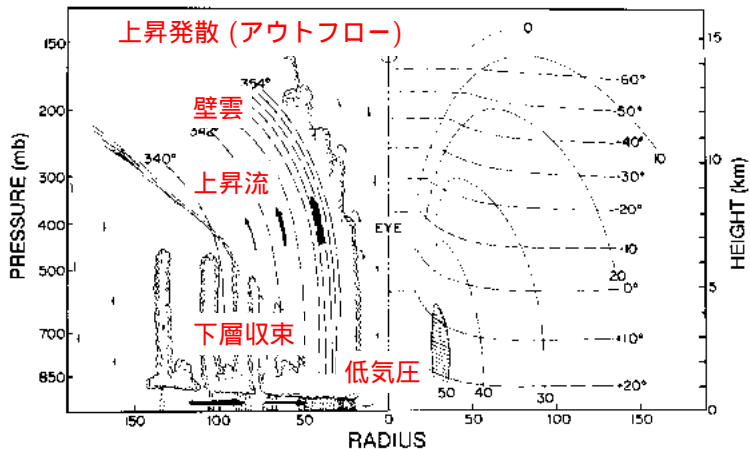
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



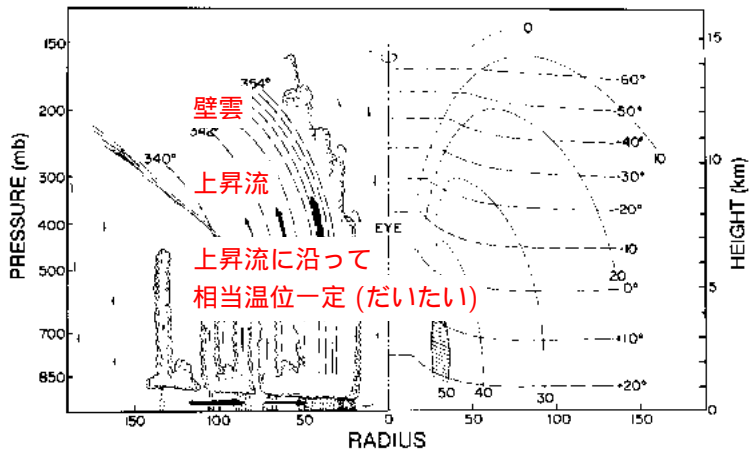
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造

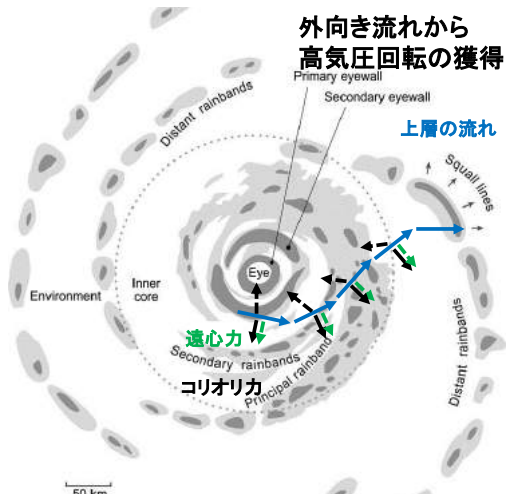


内向き流れから
低気圧回転の

境界層内の境界層上端の

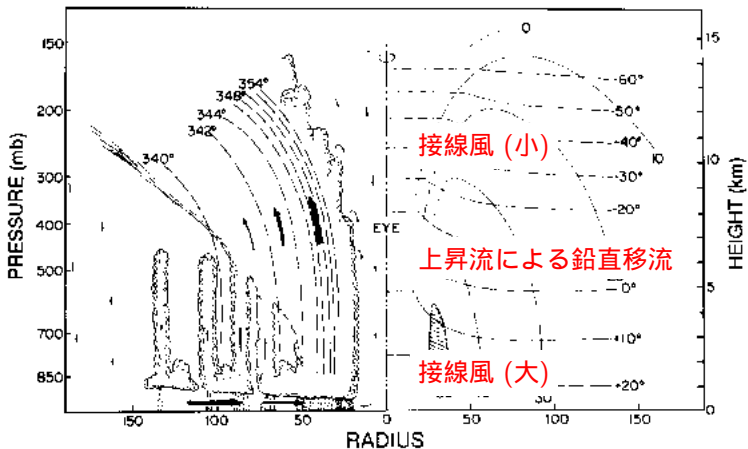
一般的な熱帯低気圧の水平断面図. (Houze, 2010, 一部追記)

成熟期の熱帯低気圧構造



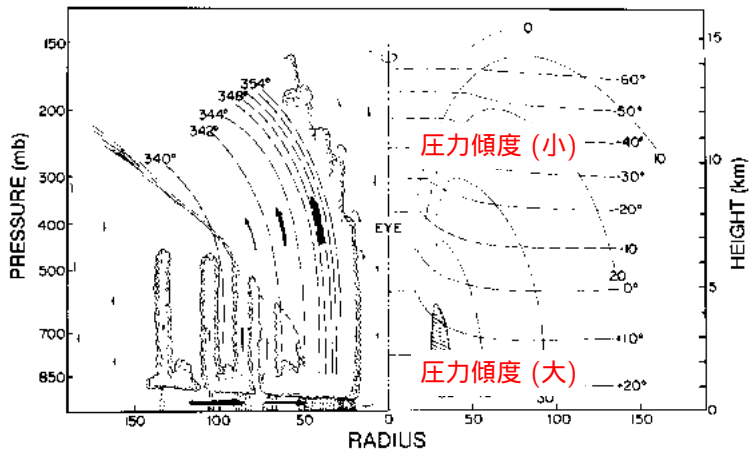
一般的な熱帯低気圧の水平断面図. (Houze, 2010, 一部追記)

成熟期の熱帯低気圧構造



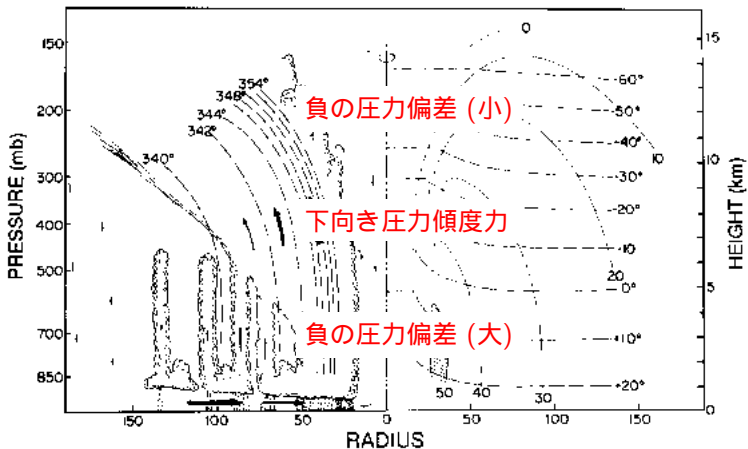
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



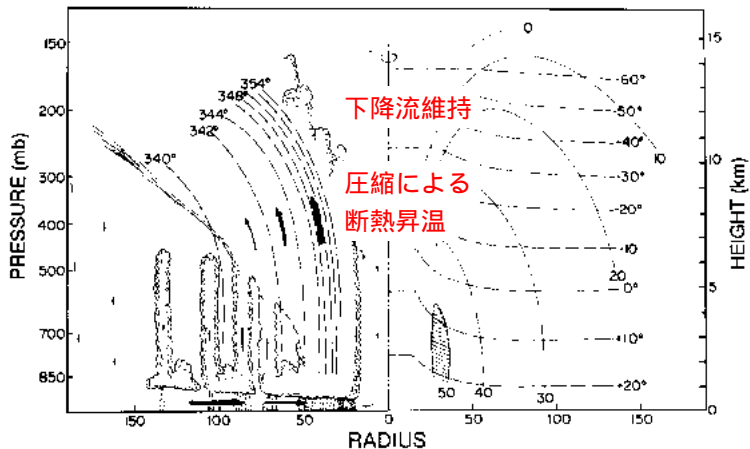
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



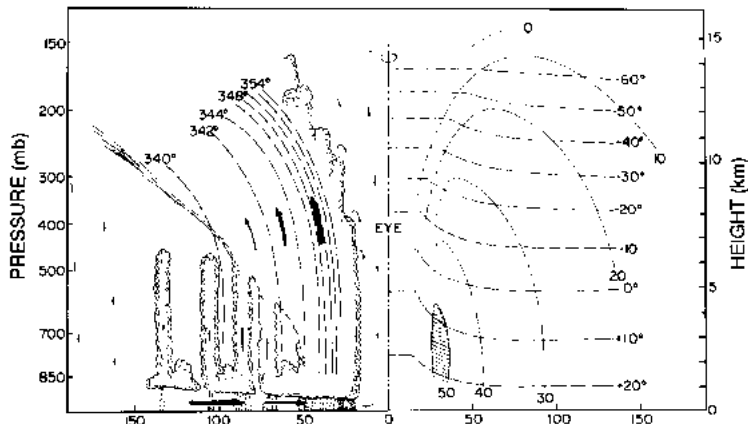
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

成熟期の熱帯低気圧構造



二次循環 ($u \sim w \sim 10 \text{ m s}^{-1}$) RADIUS 一次循環 ($v \sim 50 \text{ m s}^{-1}$)
一般的な熱帯低気圧の水平-鉛直断面図. (Wallace and Hobbs, 1977; Palmén and Newton, 1969)

微小振幅の変動に対する安定性解析手法.
大気の塊 (パーセル) を微小距離移動させたときに,

仮定

- パーセルの圧力と周囲の圧力は常に等しい.
- パーセル周囲の環境場に補償運動が存在しない (存在する場合は「スライス法」).
- パーセルの移動前後で周囲の大気と混合しない (混合する場合は「エントレインメント」).

静的不安定 (Static Instability)

$$w = \frac{D\eta}{Dt}, \quad \frac{D\varphi}{Dt} = 0, \quad \bar{\varphi}(z + \eta) \approx \bar{\varphi}(z) + \frac{d\bar{\varphi}}{dz}\eta$$

η = 微小変位, $\bar{\varphi}(z)$ = 任意の環境場の熱力学変数.
 φ はパーセル保存量 ($\varphi(z + \eta) = \varphi(z)$).

鉛直方向に η だけ変位したときの運動方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{Dw}{Dt} = \right) \frac{D^2\eta}{Dt^2} &= g \left(\frac{\varphi(z + \eta) - \bar{\varphi}(z + \eta)}{\bar{\varphi}(z + \eta)} \right) (= \text{Buoyancy}) \\ &\approx - \frac{g}{\bar{\varphi}(z)} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dz} \right) \eta. \end{aligned}$$

静的不安定 (Static Instability)

基本解

バネの振動と同じ.

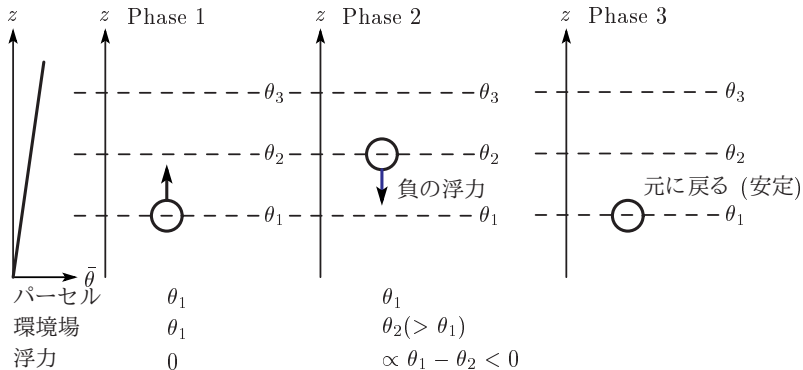
$$\eta \propto \begin{cases} \exp(|N|t), & N^2 < 0, & \text{Unstable,} \\ t, & N^2 = 0, & \text{Neutral,} \\ \exp(iNt), & N^2 > 0, & \text{Stable,} \end{cases} \quad N^2 \equiv \frac{g}{\bar{\varphi}} \frac{d\bar{\varphi}}{dz}.$$

不安定 持ち上げ先で上向き浮力 (より上層へ).

中立 持ち上げ先で浮力ゼロ (最初のを維持).

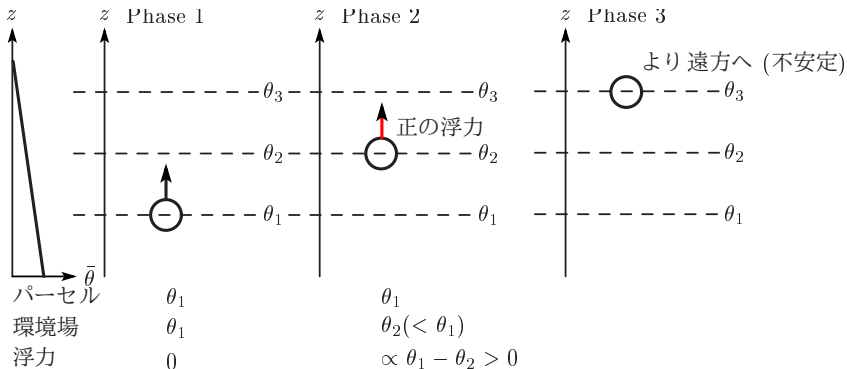
安定 持ち上げ先で下向き浮力 (もとの場所へ).

静的不安定 (Static Instability)



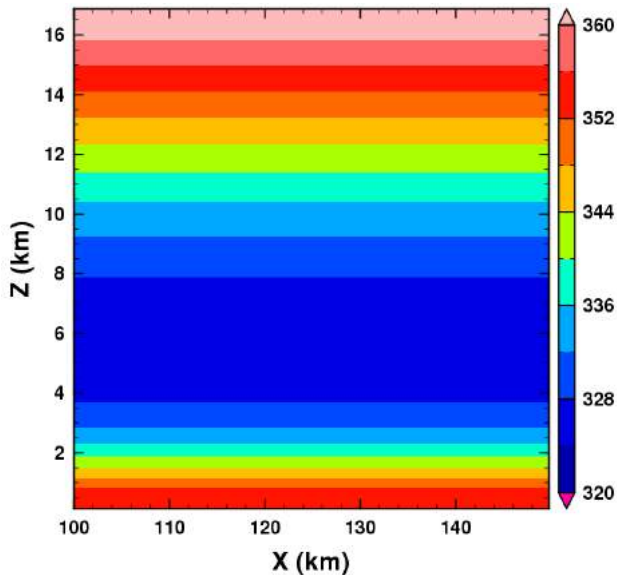
安定の場合のパーセルにかかる力の大きさと環境場の関係.

静的不安定 (Static Instability)



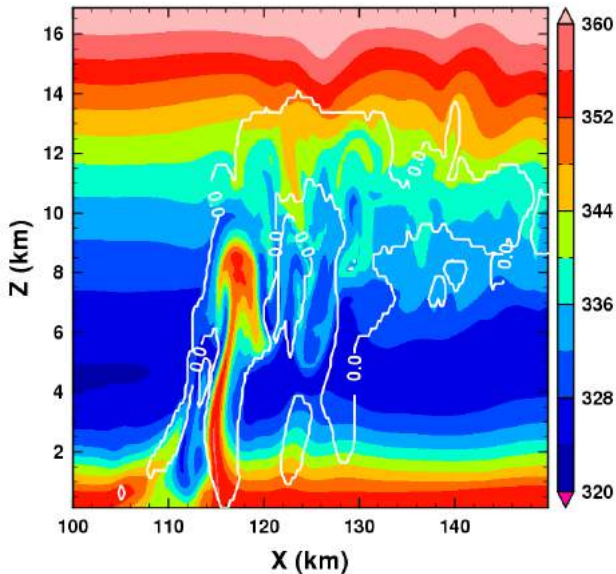
不安定の場合のパーセルにかかる力の大きさと環境場の関係.

静的不安定 (Static Instability)



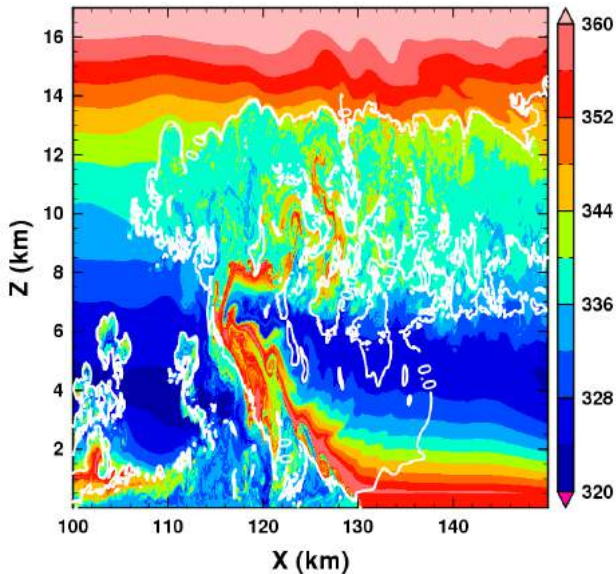
静的不安定のアニメーション.

静的不安定 (Static Instability)



静的不安定のアニメーション.

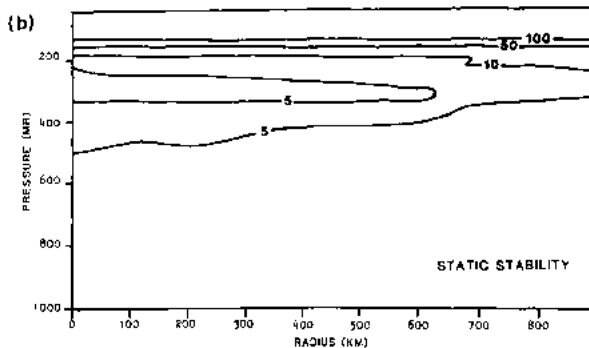
静的不安定 (Static Instability)



解像度依存性アニメーション.

静的不安定 (Static Instability)

- 対流圏全層で安定.
- 対流圏界面付近で強く安定.



観測から得られた熱帯低気圧での静的安定度 (Holland and Merrill, 1984).

慣性不安定 (Inertial Instability)

$$u = \frac{D\eta}{Dt}, \quad \frac{DM}{Dt} = 0, \quad M_g(x + \eta) = M_g(x) + \frac{\partial M_g}{\partial x} \eta,$$

η = 水平微小変位,

$M_g(x) = v_g + fx$ = 環境場の絶対角運動量 (地衡風バランス),

$M = v + fx$ = パーセル保存量 ($M(x + \eta) = M(x)$).

水平方向に η だけ変位したときの運動方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{Du}{Dt} = \right) \frac{D^2\eta}{Dt^2} &= f(v - v_g) \quad (CF + PGF) \\ &= -f \frac{\partial M_g}{\partial x} \eta \end{aligned}$$

慣性不安定 (Inertial Instability)

基本解

静的安定度と全く同じ議論で...

$$\eta \propto \begin{cases} \exp(|I|t), & I^2 < 0, & \text{Unstable,} \\ t, & I^2 = 0, & \text{Neutral,} \\ \exp(iIt), & I^2 > 0, & \text{Stable,} \end{cases} \quad I^2 \equiv f \frac{\partial M_g}{\partial x}.$$

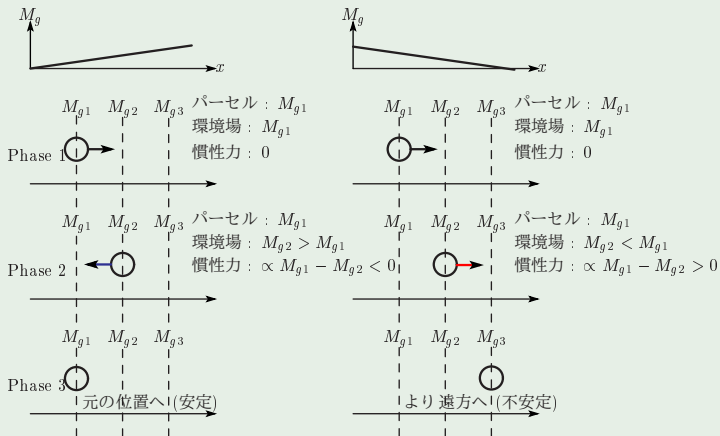
不安定 移動先で周りより高速 ($CF > PGF$ でより遠方へ).

中立 移動先で周りと同じ速度 (最初の速度を維持).

安定 移動先で周りより低速 ($CF < PGF$ で元の場所へ).

慣性不安定 (Inertial Instability)

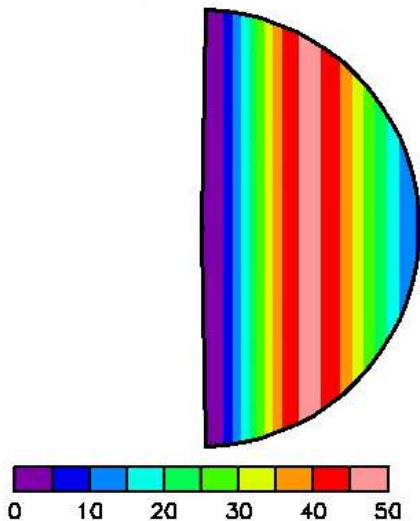
不安定の様子



安定 (左), 不安定 (右) の場合のパーセルにかかる力の大きさと環境場の関係.

慣性不安定 (Inertial Instability)

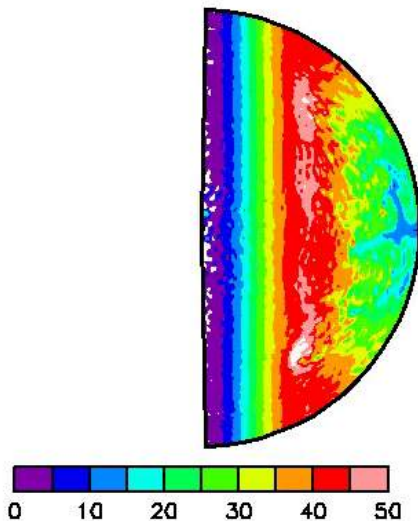
Ion-velocity



慣性不安定のアニメーション (竹広 2017).

慣性不安定 (Inertial Instability)

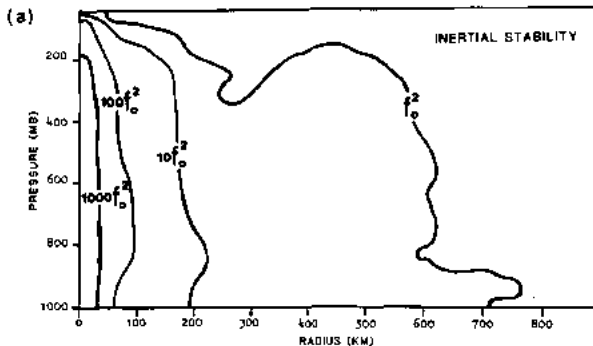
Ion-velocity



慣性不安定のアニメーション (竹広 2017).

慣性不安定 (Inertial Instability)

- 対流圏全層で安定.
- 渦中心で強く安定.

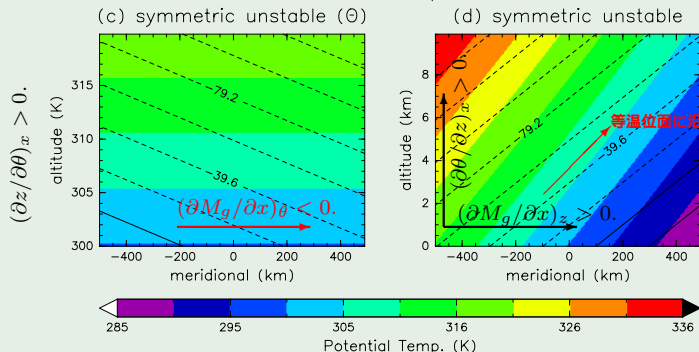


観測から得られた熱帯低気圧での慣性安定度 (Holland and Merrill, 1984).

対称不安定 (Symmetric Instability)

静的 (鉛直) 安定かつ慣性 (水平) 安定な場 \neq 任意の変位に安定な場.
 \Rightarrow 特定の方向には不安定となることがある.

対称不安定な例



対称不安定な環境場の水平-温位断面 (左), 水平-高度断面 (右). カラーは温位, 等値線は絶対角運動量.

対称不安定 (Symmetric Instability)

対称不安定の尺度

等温位面 (等ポテンシャル面) 上での慣性不安定として...

$$f \left(\frac{\partial M_g}{\partial x} \right)_\theta < 0$$

両辺 $(\partial\theta/\partial z)_x > 0$ をかけると...

$$f P_g \begin{cases} < 0, & \text{Unstable,} \\ = 0, & \text{Neutral,} \\ > 0, & \text{Stable,} \end{cases} \quad P_g \equiv \left(\frac{\partial v_g}{\partial x} + f \right)_\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_x .$$

P_g は環境場の地衡風バランスしたポテンシャル渦度.

$P_g < 0$ となる環境は地球上にあまり存在しない.

例外: 台風中心付近では $\partial\theta_e/\partial z \approx 0$ のため, 近似的に $P_g \approx 0$ の対称中立が実現.

対称中立の意味

$$\text{対称中立である} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial M_g}{\partial x} \right)_\theta = 0$$

↓

θ 面上で M_g が一定である.

↓

θ 面と M_g 面が一致.

↓

等温位面上でのパーセル運動は角運動量が保存される.
(等角運動量面上でのパーセルの運動は温位が保存される.)

ロスビー波とは

ポテンシャル渦度 (q) 保存則

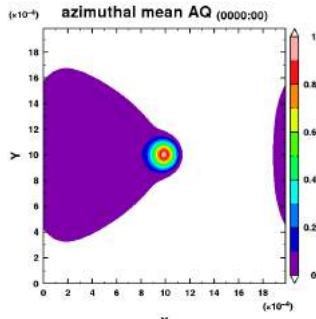
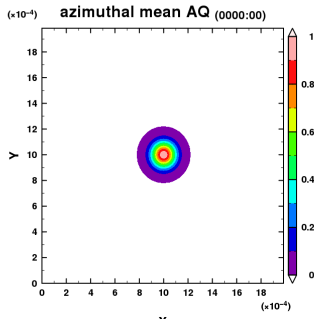
$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla q = 0$$

に従って伝播する擾乱の総称 (PV-wave とも).

ロスビー波の**分散関係**

$$\omega = k \left[-\frac{dQ/dy}{k^2 + l^2} + U(y) \right].$$

ロスビー波の伝播特性



- 低波数 (長波長) が速い (分散性波動).
- 高波数 (短波長) は東に取り残される.
- 先行台風の東側に新しい台風を形成する (ロスビー波応答).

ロスビー波の伝播特性

波の位相速度 c_p は振動数 ω と伝播方向の波数 k の比なので,

$$c_p = \frac{\omega}{k} = -\frac{dQ/dy}{k^2 + l^2} + U(y)$$

がロスビー波の絶対位相速度. 平均流に乗った座標系でみると, 相対位相速度 \tilde{c}_p は

$$\tilde{c}_p = c_p - U(y) = -\frac{dQ/dy}{k^2 + l^2}.$$

ロスビー波の伝播特性

- 分散性のある波 (位相速度が擾乱のスケールに依存).
- 伝播方向は基本場のポテンシャル渦度の空間分布に依存.

惑星ロスビー波の場合

基本場の風がなく ($U(y) = 0$), 大気の柱が伸び縮みしない ($H(y) = \text{一定}$) 地球上では惑星ロスビー波が発生.

このとき,

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{d}{dy} \left[\frac{\bar{\zeta} + f(y)}{H} \right] = \frac{1}{H} \frac{df}{dy}.$$

北半球では赤道から極に向かうほど f は大きくなるので,

$$\frac{df}{dy} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dy} > 0.$$

このときのロスビー波の位相速度は

$$c_p = -\frac{dQ/dy}{k^2 + l^2} < 0.$$

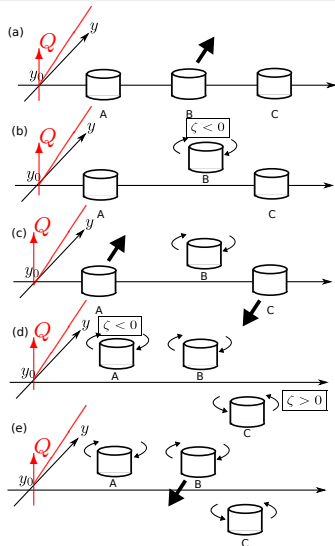
北半球での惑星ロスビー波は西向きに伝播する.

ロスビー波の伝播メカニズム

静止した流体において、基本場のポテンシャル渦度 Q が北向きに増加 ($dQ/dy > 0$) しているとき、

- (a) 流体柱 B が北向きに変位させられる (摂動渦度 $\zeta = 0$).
- (b) ポテンシャル渦度の保存から B の $q = \zeta/H + Q$ は常に一定. 北に移動すると B は $\zeta < 0$.
- (c) B によって周囲に高気圧性回転が生まれる. この流れで A は北向きに, C は南向きに流される.
- (d) (b) と同じように, A では $\zeta < 0$, C では $\zeta > 0$ となる.
- (e) A と C で起こされた流れで B は南に移動, 元の位置に戻る.

これを繰り返すと, この波は西にのみ伝播することができる。



ロスビー波の伝播メカニズムの模式図.
(林・竹広, 2014, 理論ノート一部追記)

熱帯低気圧発達の理論

- 協調強化メカニズム (Ooyama, 1964, 1969).
- CISK メカニズム (Charney and Eliassen, 1964).
- **ASII, WISHE メカニズム** (Emanuel, 1986; Rotunno and Emanuel, 1987; Emanuel, 1989).

大気海洋相互作用不安定 (ASII/WISHE)

Emanuel (1986) によって提唱され, Rotunno and Emanuel (1987) などによって確認されている有限振幅渦 (成熟期の TC) の維持メカニズム.

- 軸対称渦が有限振幅で, 斜向対流に対して中立であると仮定した不安定理論.
- 系全体のエネルギーがバランスしており, エネルギーソースは海洋からの熱エネルギー, エネルギーシンクは海面付近での運動エネルギーの摩擦による減衰.
- WISHE という単語自体は Yano and Emanuel (1991) が由来.

大気海洋相互作用不安定 (WISHE)

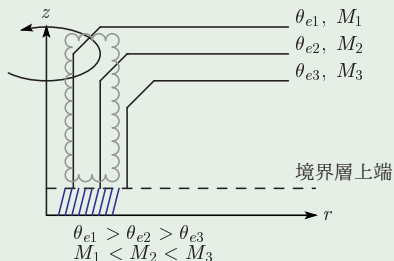
支配方程式系

静力学・傾度風バランス,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V^2}{r} + fV = \frac{m^2}{r^3} - \frac{f^2 r}{4},$$

斜向湿潤対流に対して中立
(Appendix あり)

$$\left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_M = \left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_{s^*}.$$



考えている系 (Emanuel (1986) を元に作成).

大気海洋相互作用不安定 (WISHE)

境界層での仮定 (混合層近似)

- 層内での力学・熱力学分布は高度方向一様.
- 乱流フラックス τ は高度で線形に変化.
- 境界層上端で乱流フラックスはゼロ.

基礎方程式:

$$\frac{DM}{Dt} = rF = -\frac{\partial \tau_M}{\partial z},$$

$$\frac{Ds^*}{Dt} = Q = -\frac{\partial \tau_s}{\partial z},$$

接地境界層 ($z \approx 0$) で

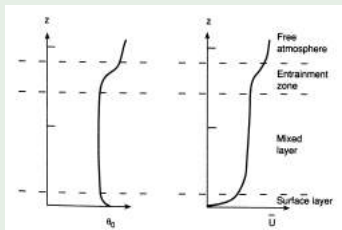
$$\tau_M = -rC_D|V|V,$$

$$\tau_s = -C_E C_p |V| (\ln \theta_e - \ln \theta_{es}).$$

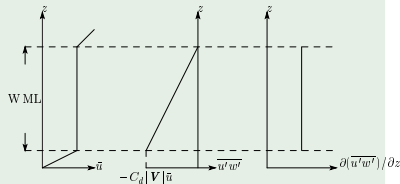
境界層上端 ($z = h$) で

$$\tau_M = 0, \quad \tau_s = 0.$$

C_D , C_E は運動量・熱交換係数, θ_e , θ_{es} は大気下層と海面での相当温位, $s^* = C_p \ln \theta_e$.



風速 乱流フラックス 乱流フラックス発散



(上) 混合層内における温位と水平風速の鉛直分布 (Holton, 2004).

(下) 混合層付近での乱流フラックスの分布 (概念図).

大気海洋相互作用不安定 (WISHE)

混合層が定常であると仮定すると、境界層上端高度を h として

$$\begin{aligned}\frac{DM}{Dt} &\approx u \frac{\partial M}{\partial r} = -\frac{rC_D|V|V}{h}, \\ \frac{Ds^*}{Dt} &\approx u \frac{\partial s^*}{\partial r} = -\frac{C_EC_p|V|}{h}(\ln \theta_e - \ln \theta_{es}),\end{aligned}$$

なので、上式を合わせて u を消去すると、

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)_z \bigg/ \left(\frac{\partial s^*}{\partial r}\right)_z = \frac{dM}{ds^*} = \frac{C_D}{C_E} \frac{rV}{C_p(\ln \theta_e - \ln \theta_{es})}.$$

これを自由大気の運動方程式と接続すると、

$$V^2 + \frac{fr}{2}V = -C_p(\ln \theta_e - \ln \theta_{es})(T_b - T_{out})\frac{C_E}{C_D}. \quad (1)$$

大気海洋相互作用不安定 (WISHE)

$$V \propto \underbrace{(\ln \theta_{es} - \ln \theta_e)}_{(\dagger 1)}, \quad \underbrace{(T_b - T_{out})}_{(\dagger 2)}, \quad \underbrace{\frac{C_E}{C_D}}_{(\dagger 3)}$$

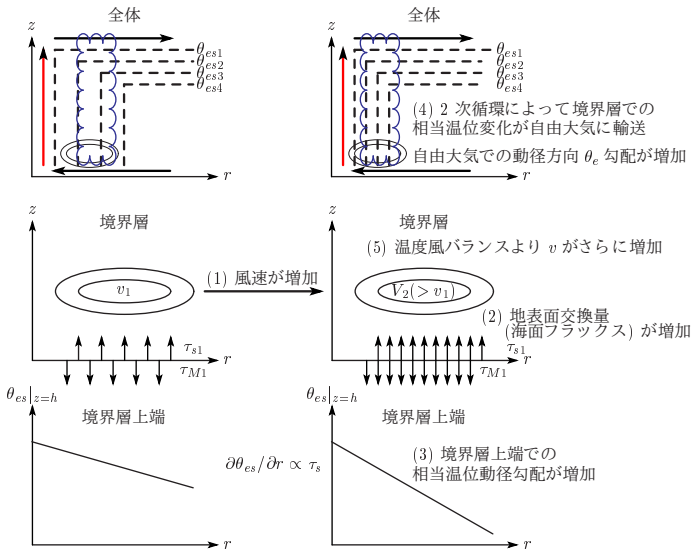
という関係から, TC の強度は

- (†1) 海面からの熱フラックス,
- (†2) 対流圏の高さ,
- (†3) 海面での熱・運動量交換過程,

に依存する.

特に, 熱の交換過程が活発なら TC は強化する.

大気海洋相互作用不安定 (WISHE) まとめ



WISHE による正のフィードバックまとめ.

熱帯低気圧が発達するとは？

熱帯低気圧渦の発達

渦の風速を v としたとき、

$$\frac{\partial v}{\partial t} > 0.$$

接線方向の運動方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u(f + \zeta) - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\lambda,$$

$$\zeta \equiv \frac{\partial(rv)}{r\partial r}.$$

壁雲の役割 (軸対称バランス渦からの発達)

支配方程式

運動方程式 (軸対称, 傾度風・静力学バランス)

$$\left(f + \frac{v}{r}\right)v = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad (\text{orig.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \left(f + \frac{\partial rv}{r\partial r}\right) + w \frac{\partial v}{\partial z} = \dot{v}, \quad (\text{orig.2})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{g}{T_0}T, \quad (\text{orig.3})$$

連続の式 (非弾性近似)

$$\frac{\partial(\rho ru)}{r\partial r} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (\text{orig.4})$$

熱力学方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{R_d}{C_p H} w T = \frac{Q}{C_p}. \quad (\text{orig.5})$$

壁雲の役割 (軸対称バランス渦からの発達)

Sawyer-Eliassen Equation (Eliassen, 1951)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial z} + B \frac{\partial r \psi}{r \partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(B \frac{\partial \psi}{\partial z} + A \frac{\partial r \psi}{r \partial r} \right) = -\frac{2}{r} \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{g}{C_p T_0} \frac{\partial Q}{\partial r}. \quad (2)$$

$$\rho A = \frac{g}{T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{R_d}{C_p H} T \right), \quad (\text{orig.8})$$

$$\rho B = -\frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M^2}{r^3} \right), \quad (\text{orig.9})$$

$$\rho C = \left(f + \frac{2v}{r} \right) \left(f + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M^2}{r^3} \right) + \frac{3M^2}{r^4}, \quad (\text{orig.10})$$

A, B C はそれぞれ静的安定性, 傾圧性, 慣性安定性.

$$\rho w = \frac{\partial r \psi}{r \partial r}, \quad \rho u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{orig.12})$$

- バランスした流れに強制を与えたとき、強制に応答する流れを一意に与える.
- 右辺が既知なら、(条件付きで) 楕円形偏微分方程式 $\Rightarrow \psi$ が一意に求まる.
- ψ が求まれば、連続の式から動径、鉛直の流れが求まる.
- ψ について線形なので、強制の重ね合わせは流れの重ね合わせ.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial z} + B \frac{\partial r \psi}{r \partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(B \frac{\partial \psi}{\partial z} + A \frac{\partial r \psi}{r \partial r} \right) = -\frac{2}{r} \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{g}{C_p T_0} \frac{\partial Q}{\partial r},$$

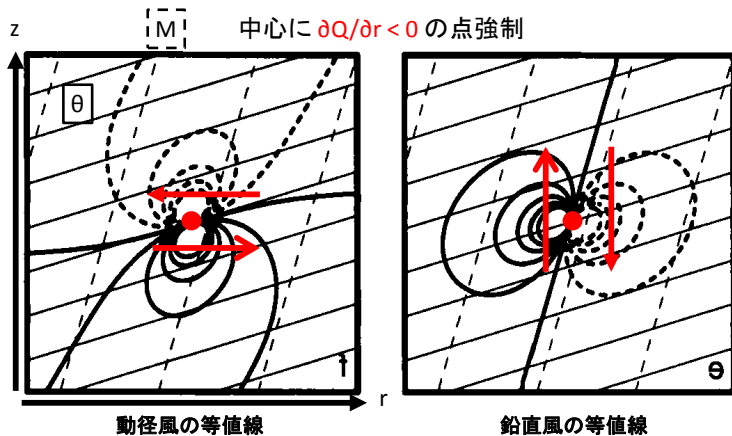
$$\rho w = \frac{\partial r \psi}{r \partial r}, \quad \rho u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Sawyer-Eliassen 応答

慣性安定, 静的安定なバランス渦に $\partial Q/\partial r < 0$ の強制を置くと...

動径風 (強制付近で) 温位面に沿って流れる.

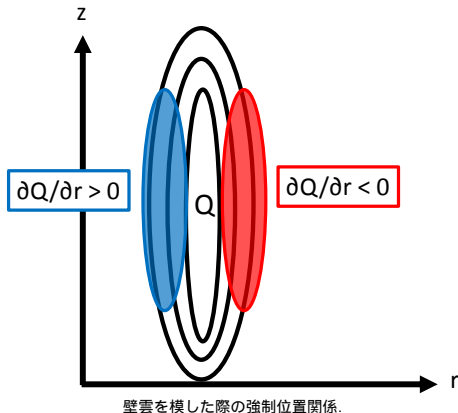
鉛直風 (強制付近で) 角運動量面に沿って流れる.



点強制に対する流れ場の応答 (Hakim and Keyser, 2001).

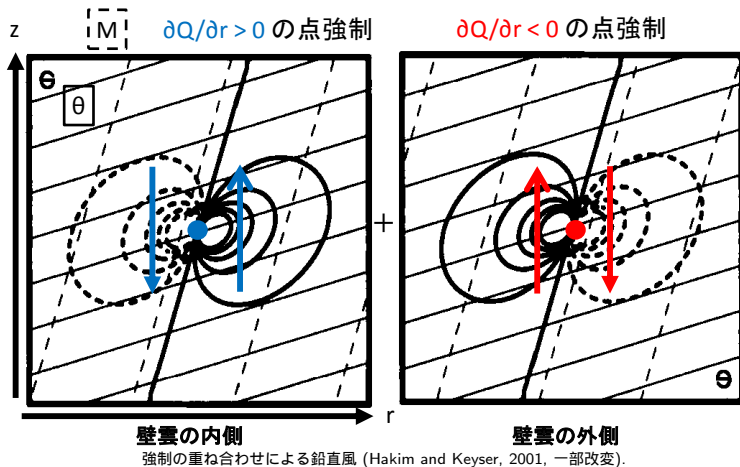
実際の壁雲は非断熱加熱 Q について,

- 内側で $\partial Q/\partial r > 0$.
- 外側で $\partial Q/\partial r < 0$.



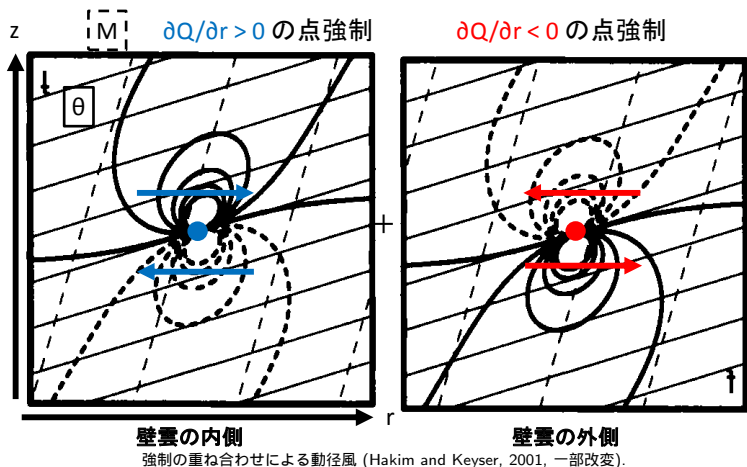
Sawyer-Eliassen 応答

壁雲を模した加熱強制は Sawyer-Eliassen 方程式の線形性を利用すると、
上昇流は壁雲で上向き。



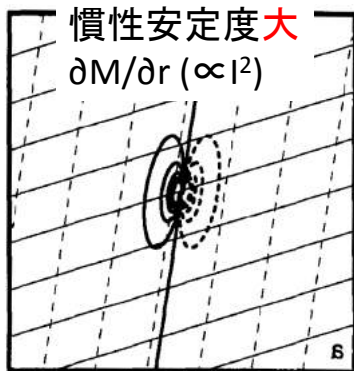
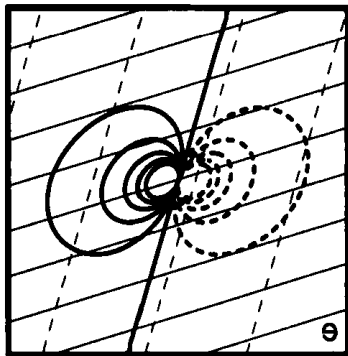
Sawyer-Eliassen 応答

壁雲を模した加熱強制は Sawyer-Eliassen 方程式の線形性を利用すると、
動径風は壁雲でほぼ相殺 (ゼロ).



強制による鉛直風の空間スケール

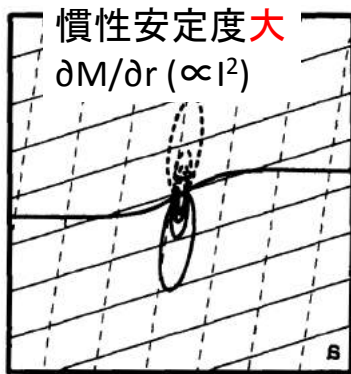
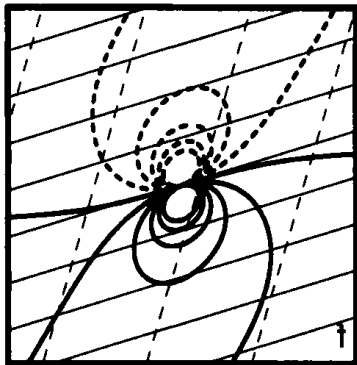
慣性安定度が**大きい**と、鉛直風の水平スケールが**小さく**なる。



安定度に対する鉛直風のスケール依存性 (Hakim and Keyser, 2001, 一部改変).

強制による動径風の空間スケール

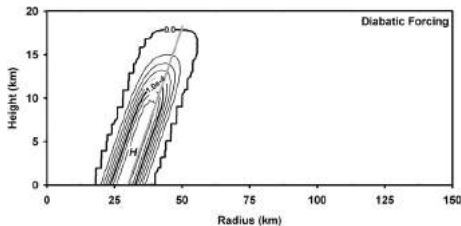
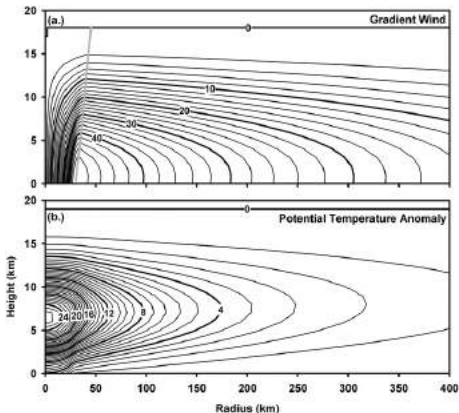
慣性安定度が**大きい**と、動径風の水平スケールが**小さく**なる。



安定度に対する動径風のスケール依存性 (Hakim and Keyser, 2001, 一部改変).

壁雲の役割 (軸対称バランス渦からの発達)

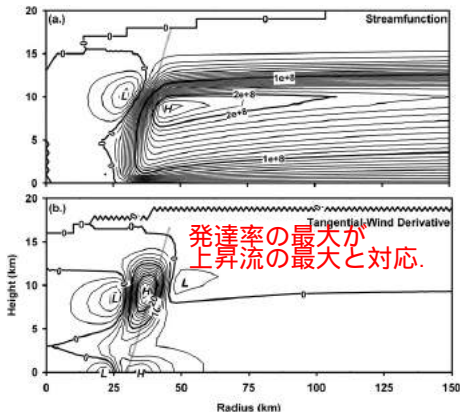
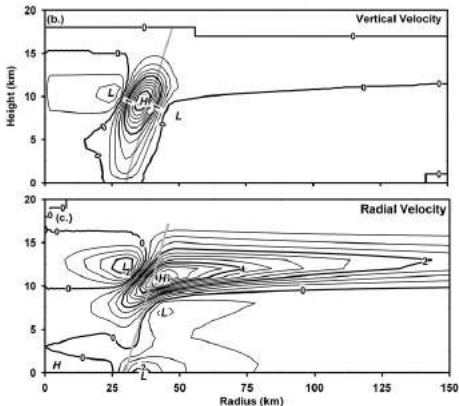
Pendergrass and Willoughby (2009) は温度風関係を満たす軸対称な熱帯低気圧渦に、壁雲を模した非断熱加熱分布を与えたときの、接線風の時間変化 (発達率) を調べた。



理想的な渦の (左上) 接線風, (左下) 温位偏差, (右上) 非断熱加熱 (Pendergrass and Willoughby, 2009).

壁雲の役割 (軸対称バランス渦からの発達)

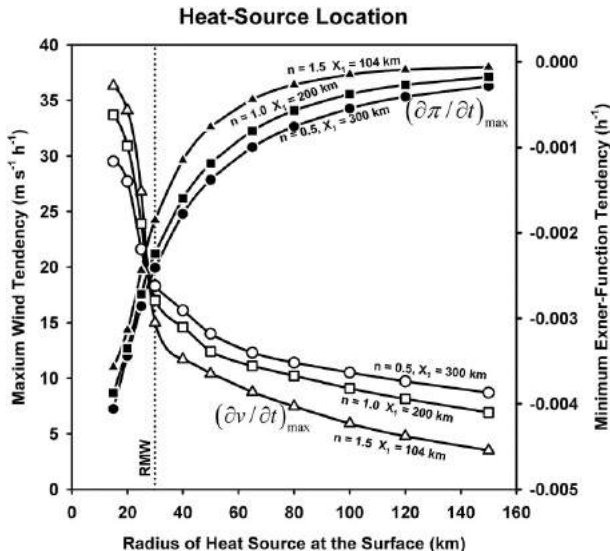
- 壁雲に対応した上昇流, 壁雲側面での補償下降流が診断.
- 下層での内向き流れ, 上層での外向き流れが診断.
- 二次循環の大部分は壁雲によって駆動.
- 渦の発達は壁雲上昇流による鉛直移流が支配.



バランス渦の非断熱加熱に対する応答 (左上) 鉛直風, (左下) 動径風, (右上) 流線関数, (右下) $\partial v / \partial t$ (発達率)

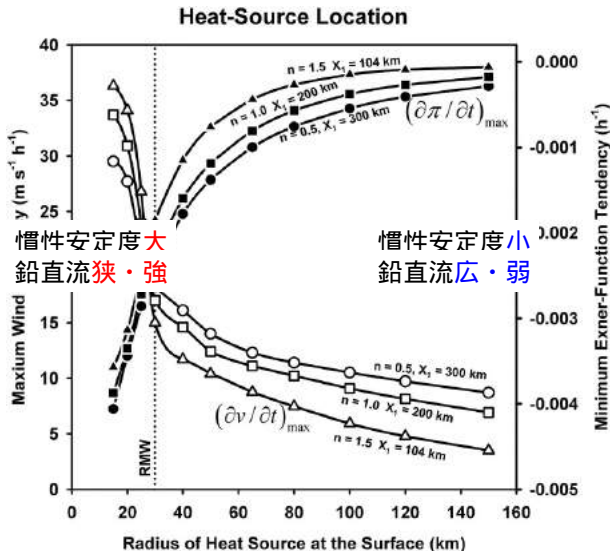
(Pendergrass and Willoughby, 2009).

壁雲の役割 (軸対称バランス渦からの発達)



発達率に対する壁雲と最大風速半径の相対距離の依存性 (Pendergrass and Willoughby, 2009).

壁雲の役割 (軸対称バランス渦からの発達)



発達率に対する壁雲と最大風速半径の相対距離の依存性 (Pendergrass and Willoughby, 2009).

壁雲の役割 (軸対称バランス渦からの発達)

接線方向の運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u(f + \zeta) - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\lambda,$$

から, 自由大気 ($F_\lambda \sim 0$) の壁雲では鉛直移流項が卓越:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim -w \frac{\partial v}{\partial z}.$$

温度風関係から

$$\frac{\partial v}{\partial z} < 0.$$

低気圧の発達率は鉛直流の大きさで決まる.

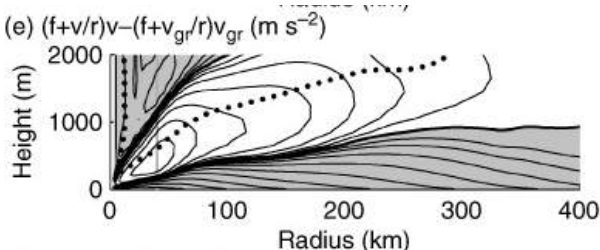
慣性安定度と壁雲・RMW の位置関係, そして発達率

壁雲の位置	慣性安定度	上昇流	発達率
RMW より内側	大	強	大
RMW より外側	小	弱	小

境界層 (非バランス成分) の役割

- 現実の熱帯低気圧は温度風関係 (傾度風・静力学バランス) を完璧には満たさない。
- このバランスの崩れは主に台風境界層付近で顕著 (e.g., Kepert, 2010a,b).
- 実際の台風境界層は, 混合層 (WISHE での仮定) より強い (非線形エクマン層による) 内向き流れが発生している可能性 (e.g., Kepert, 2010a,b).

どうして境界層内の内向き流れが強くなると, 発達するのか?



台風境界層モデル (水蒸気なし) における傾度風からのずれ (Kepert, 2010b).

境界層 (非バランス成分) の役割

接線方向の運動方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u(f + \zeta) - w \frac{\partial v}{\partial z} + F_\lambda,$$

から, 境界層内では $F_\lambda < 0$.

しかし, インフローが大きければ ($u \ll 0$)

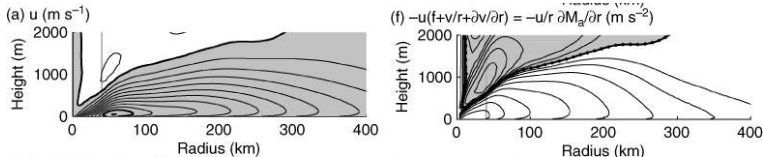
$$-u(f + \zeta) > -F_\lambda,$$

という状態が実現される. つまり,

$$\frac{\partial v}{\partial t} > 0$$

で発達可能. (= 境界層スピンアップ)

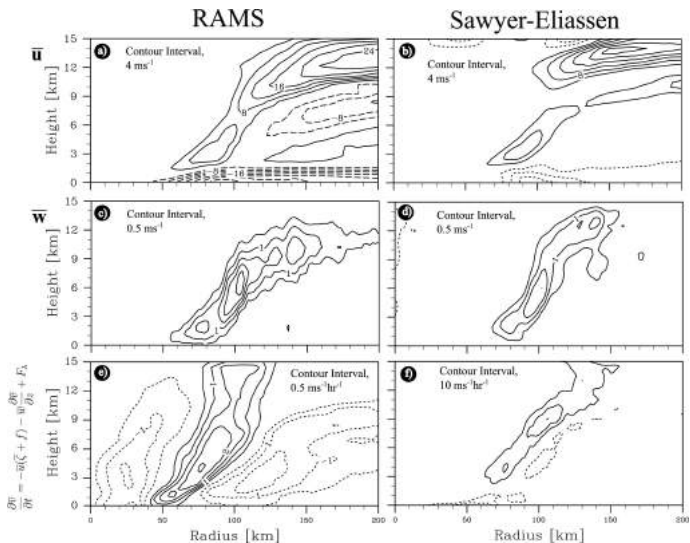
SE 循環による内向き流れがなくても, 境界層での内向き渦輸送が発生.



台風境界層モデル (水蒸気なし) における (左) 内向き流れ, (右) スピンアップ項 (Kepert, 2010b).

境界層 (非バランス成分) の役割

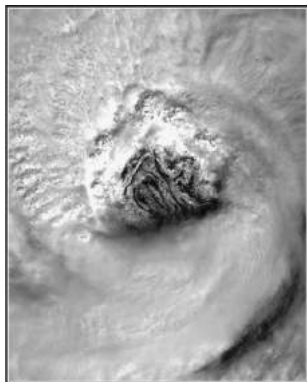
バランス成分 v.s. 非バランス成分



非静力学雲モデルでの熱帯低気圧の循環と SE 方程式での診断した循環 (Abarca and Montgomery, 2015).

メソ渦 (非軸対称構造) の役割

- 現実の熱帯低気圧は完全軸対称 (円状構造) ではなく, 接線方向にも変化する.
- 低気圧中心付近での非軸対称構造は眼の中のメソ渦, 多角形の壁雲として可視化される.
- メソ渦・多角形壁雲は**順圧不安定**を通して, 低気圧の接線風速を変化させる (e.g., Schubert et al., 1999).
- 非軸対称構造を考慮すると, 軸対称構造の熱帯低気圧より最大到達強度が弱くなる (e.g., Yang et al., 2007).



熱帯低気圧に伴う非軸対称構造の例.
ハリケーン Erin (2001) のメソ渦と三角形の壁雲 (Houze, 2010).

順圧不安定

流れに水平シアが存在する場において発達する不安定.

順圧不安定 (Rayleigh の不安定条件)

Kuo の定理

順圧不安定を引き起こすためには、平均流の PV が極値をもつ (平均流 PV の空間勾配のゼロ点が存在する)。

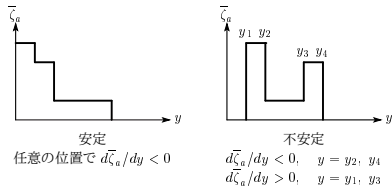
Rayleigh の定理

$\beta = 0$ の場合、順圧不安定を引き起こすためには、平均流の渦度の空間勾配にゼロ点 (流速の変曲点) が存在する。

このタイプの不安定は

- 平均流の流速の最小値より小さい位相速度の波であっても起こる (先の積分方程式の実部から証明可能)。
- 不安定の条件が必要条件である。

台風渦 (or 竜巻渦) がランキン渦で仮定される根拠の 1 つ。



順圧安定な場合 (左) と順圧不安定な場合 (右) における平均場の PV (\bar{c}_a) の空間分布。

順圧不安定 (エネルギー論による説明)

非粘性, 非発散の 2 次元水平運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

運動エネルギーを $K = (u^2 + v^2)/2$ で定義.

$$u = \bar{u}(y, t) + u'(x, y, t), \quad v = v'(x, y, t).$$

領域積算 (システム全体の) エネルギーの時間変化は,

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial t} = \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{K}'}{\partial t} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}.$$

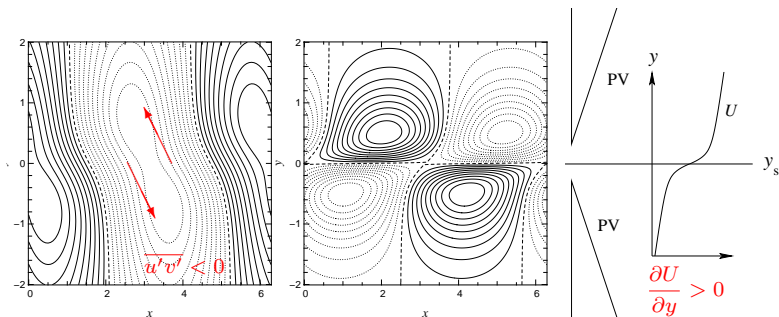
平均流と摂動のエネルギー変換方向は摂動水平風の相関量と平均流の空間変化量で決まる.

順圧不安定 (エネルギー論による説明)

平均流の作る PV 場の空間変化が途中で逆に傾くとき、摂動は西に傾く。

$$\overline{u'v'} < 0, \text{ and } \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{K}}{\partial t} < 0, \quad \frac{\partial \bar{K}'}{\partial t} > 0.$$

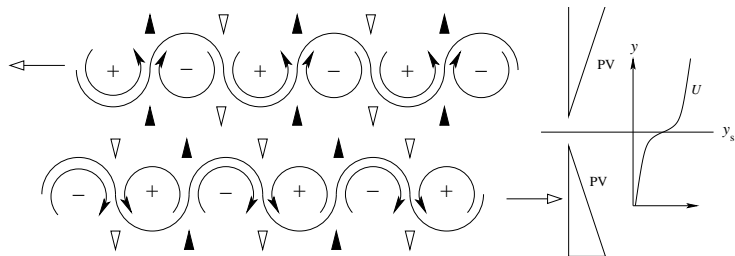
摂動のエネルギーは増加し、不安定成長を起こす。
平均流のエネルギーは減少し、流れが減速する。



順圧不安定条件での流線関数 (a), 渦度 (b), 平均流 (c) の水平分布. (Satoh, 2006, Springer, 一部追記)

順圧不安定 (不安定ロスビー波による説明)

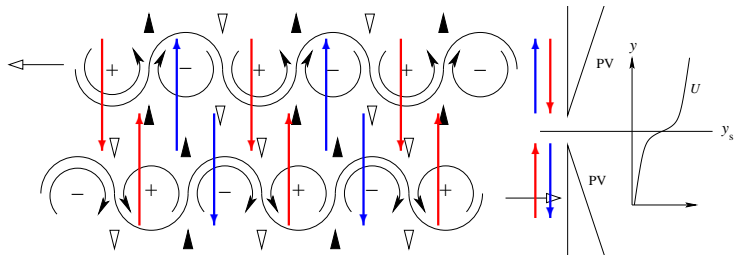
- 平均流が北に向かって増加しており, 点 $y = y_s$ で平均流の PV 勾配が逆転している場合, y_s の北側と南側では平均流に相対的な渦列の伝播方向が逆 (ロスビー波).
- 状況によっては, それぞれの波の相対的な位置関係が変化しないことがある (phase-lock).
⇒ これは, 平均流の空間変化のため.



高次の渦度定規を用いた順圧不安定の説明. この分布は先の順圧不安定での平均流の分布と同じ (Satoh, 2006, Springer, 一部追記; 林・竹広, 2014, 理論ノート参考).

順圧不安定 (不安定ロスビー波による説明)

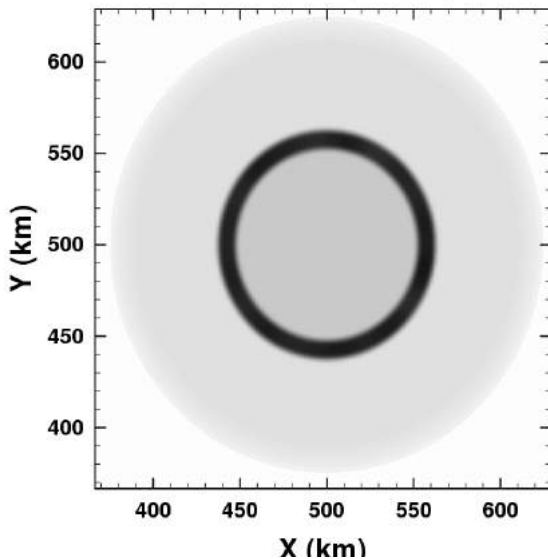
- この状況で渦列が西に傾くと、それぞれの流れによる y 方向の渦度移流が、両方の渦列の各渦度の**大きさをより増加**させるように作用する。
- 正渦の場所ではより渦度が正に増加し、負渦の場所ではより渦度が負に減少する。
- 渦度の大きさの増大はロスビー波の増幅 (不安定成長) に等しい。



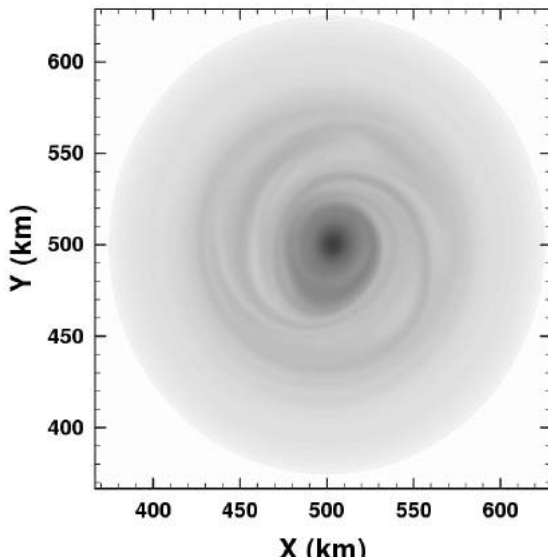
高数の渦度定規を用いた順圧不安定の説明。この分布は先の順圧不安定での平均流の分布と同じ (Satoh, 2006, Springer, 一部追記; 林・竹広, 2014, 理論ノート参考)。

赤矢印は流れに伴って摂動の渦度が**増加**, 青矢印は流れに伴って摂動の渦度が**減少**する。

順圧不安定を伴う台風渦の成長

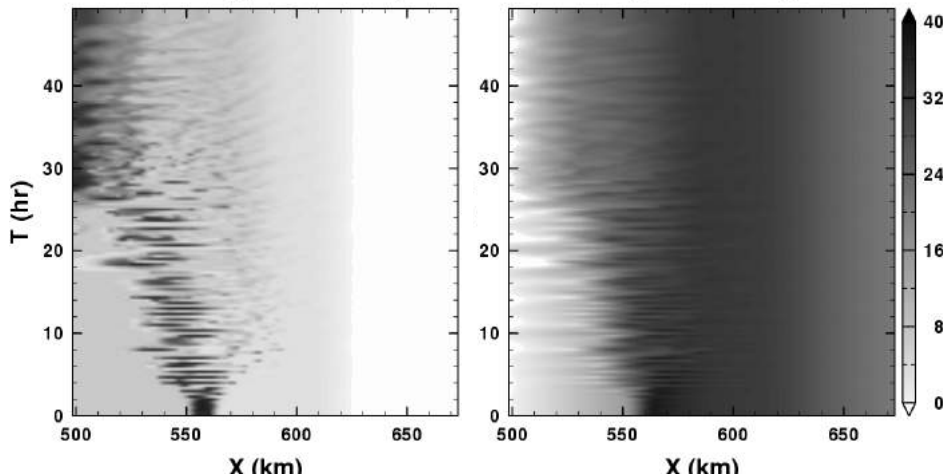


順圧不安定を伴う台風渦の成長



壁雲相当のリング渦の時間発展アニメーション.

順圧不安定を伴う台風渦の成長



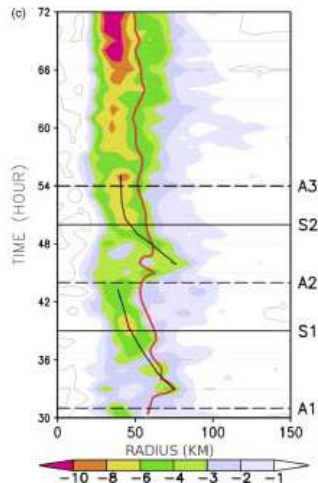
渦度 (左), 接線風速 (右) の時間変化.

順圧不安定を伴う台風渦の成長

Nguyen et al. (2011) はハリケーン Katrina (2005) の衛星観測および数値実験から、中心付近の軸対称構造が周期的に変化しながら発達していることを見つけた。

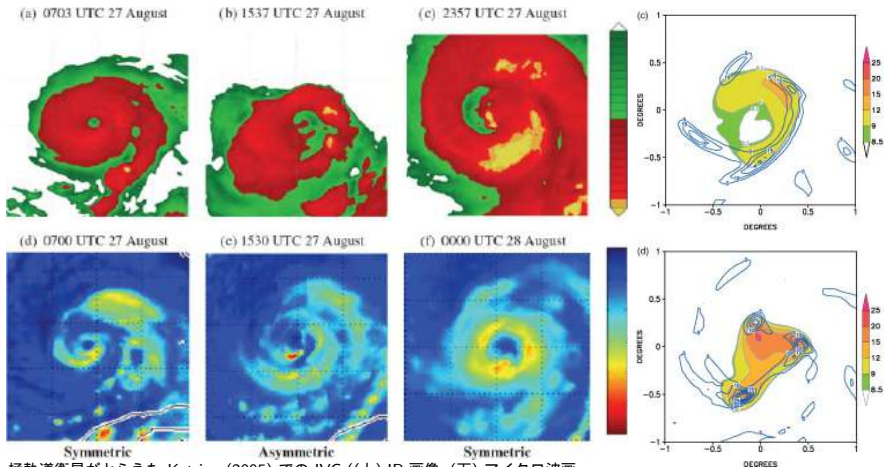
IVC の特徴

- 発達途中の熱帯低気圧で見られる。
- リング状の PV をもつ軸対称構造 (period-S) と単極子状の PV をもつ非対称構造 (period-A) の繰り返し。
- period-S で発達率大, period-A で発達率小。
- 構造変化が 4-6 時間。



オーストラリア現業モデルで再現された Katrina (2005) の 850 hPa 面での接線平均鉛直流 (Nguyen et al., 2011).

順圧不安定を伴う台風渦の成長



極軌道衛星がとらえた Katrina (2005) での IVC ((上) IR 画像, (下) マイクロ波画像). 左から軸対称, 非対称, 軸対称フェーズ (Nguyen et al., 2011).

数値モデルにおいて見られる IVC (850 hPa での PV (カラー) と鉛直流 (等値線)). 上が軸対称, 下が非対称フェーズ (Nguyen et al., 2011).

成熟した熱帯低気圧の構造

- 中心上層に高温偏差 (暖気核) の雲がない領域 (眼).
- 眼の外側をリング状の積乱雲群 (壁雲) が取り囲む.
- (北半球では) 反時計回りの一次循環 ($\sim 50 \text{ m s}^{-1}$).
- (下層で) 低気圧中心向きのインフロー, 中心少し外側の壁雲で上昇流, (上層で) 低気圧外向きのアウトフロー (二次循環 $\sim 10 \text{ m s}^{-1}$).
- 温度風関係から, 対流圏下層 (地表付近) で一次循環の最大値.

熱帯低気圧の力学研究の意義

- 熱帯低気圧中心周辺では**強風・大雨**となるため, **風害・高潮・洪水・地すべり**などの顕著災害を引き起こしうる.
- 力学研究は, これら顕著現象の**要因を特定し, 数値予報を改善**可能.

WISHE : 熱帯低気圧の強度・発達メカニズムについての理論モデル.

— WISHE の仮定 —

構造 軸対称, 斜対流に対して中立.

力学バランス 温度風バランス (静力学・傾度風バランス).

エネルギー源 混合層タイプの境界層による海面熱フラックスの供給.

補足 対流は低気圧の発達に対して一瞬で起こる.

—— 最近の発達メカニズムの考え方 ——

WISHE で考慮されていない or 仮定が成り立たない要素による発達への影響.

温度風バランス仮定 境界層での非バランス性に伴う強いインフローからの急速な発達 (e.g., Smith et al., 2009; Abarca and Montgomery, 2014).

軸対称仮定 非軸対称なメソ渦・多角形壁雲, 順圧不安定の発達による強度変化 (e.g., Schubert et al., 1999; Nguyen et al., 2011).

これらの**内部コアの力学**効果は

- 熱帯低気圧の強度に影響を与える.
- 強度予報の改善における重要な過程と考えられる.

- Abarca, S. F., and M. T. Montgomery, 2014: Departures from axisymmetric balance dynamics during secondary eyewall formation. *J. Atmos. Sci.*, **71**, 3723–3738, doi:10.1175/JAS-D-14-0018.1.
- Abarca, S. F., and M. T. Montgomery, 2015: Are eyewall replacement cycles governed largely by axisymmetric balance dynamics? *J. Atmos. Sci.*, **72**, 82–87, doi:10.1175/JAS-D-14-0151.1.
- Charney, J. G., and A. Eliassen, 1964: On the growth of the hurricane depression. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 68–75.
- Craig, G. C., and S. L. Gray, 1996: CISK or WISHE as the mechanism for tropical cyclone intensification. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 3528–3540, doi:10.1175/1520-0469(1996)053<3528:COWATM>2.0.CO;2.
- Eliassen, A., 1951: Slow thermally or frictionally controlled meridional circulation in a circular vortex. *Astrophys. Norv.*, **5**, 19–60.
- Emanuel, K. A., 1986: An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part I: Steady-state maintenance. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 585–605, doi:10.1175/1520-0469(1986)043<0585:AASITF>2.0.CO;2.
- Emanuel, K. A., 1989: The finite-amplitude nature of tropical cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3431–3456, doi:10.1175/1520-0469(1989)046<3431:TFANOT>2.0.CO;2.

- Hakim, G. J., and D. Keyser, 2001: Canonical frontal circulation patterns in terms of Green's functions for the Sawyer-Eliassen equation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **127**, 1795–1814, doi:10.1002/qj.49712757517.
- Holland, G. J., and R. T. Merrill, 1984: On the dynamics of tropical cyclone structural changes. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **110**, 723–745, doi:10.1002/qj.49711046510.
- Holton, J. R., 2004: *An Introduction to Dynamic Meteorology Fourth Edition*. Elsevier, 535 pp.
- Holton, J. R., and G. J. Hakim, 2012: *An Introduction to Dynamic Meteorology Fifth Edition*. Elsevier, 532 pp.
- Houze, R. A., 2010: REVIEW Clouds in tropical cyclones. *Mon. Wea. Rev.*, **138**, 293–344, doi:10.1175/2009MWR2989.1.
- Kepert, J. D., 2010a: Slab- and height-resolving models of the tropical cyclone boundary layer. Part I: Comparing the simulations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **136**, 1686–1699, doi:10.1002/qj.667.
- Kepert, J. D., 2010b: Slab- and height-resolving models of the tropical cyclone boundary layer. Part II: Why the simulations differ. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **136**, 1700–1711, doi:10.1002/qj.685.
- Nguyen, M. C., M. J. Reeder, N. E. Davidson, R. K. Smith, and M. T. Montgomery, 2011: Inner-core vacillation cycles during the intensification of hurricane Katrina. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **137**, 829–844, doi:10.1002/qj.823.

Reference III

- Ooyama, K., 1964: A dynamical model for the study of tropical cyclone development. *Geofis. Int.*, **4**, 187–198.
- Ooyama, K., 1969: Numerical simulation of the life cycle of tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **26**, 3–40,
doi:10.1175/1520-0469(1969)026<0003:NSOTLC>2.0.CO;2.
- Palmén, E., and C. W. Newton, 1969: *Atmospheric Circulation Systems: Their Structure and Physical Interpretation*. Academic Press, 603 pp.
- Pendergrass, A. G., and H. E. Willoughby, 2009: Diabatically induced secondary flows in tropical cyclones. Part I: Quasi-steady forcing. *Mon. Wea. Rev.*, **137**, 805–821,
doi:10.1175/2008MWR2657.1.
- Rappaport, E. N., and Coauthors, 2009: Advances and challenges at the National Hurricane Center. *Wea. Forecasting*, **24**, 395–419,
doi:10.1175/2008WAF2222128.1.
- Rotunno, R., and K. A. Emanuel, 1987: An air-sea interaction theory for tropical cyclones. Part II: Evolutionary study using a nonhydrostatic axisymmetric numerical model. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 542–561,
doi:10.1175/1520-0469(1987)044<0542:AAITFT>2.0.CO;2.
- Schubert, W. H., M. T. Montgomery, R. K. Taft, T. A. Guinn, S. R. Fulton, J. P. Kossin, and J. P. Edwards, 1999: Polygonal eyewalls, asymmetric eye contraction, and potential vorticity mixing in hurricanes. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1197–1223,
doi:10.1175/1520-0469(1999)056<1197:PEAECA>2.0.CO;2.

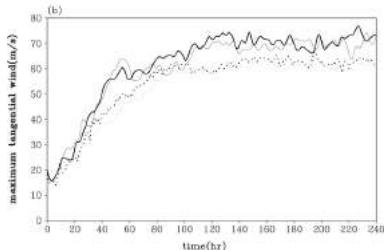
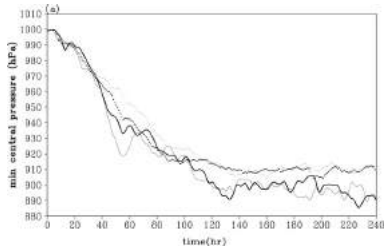
- Smith, R. K., M. T. Montgomery, and V. S. Nguyen, 2009: Tropical cyclone spin-up revisited. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **135**, 1321–1335, doi:10.1002/qj.428.
- Wallace, J. W., and P. V. Hobbs, 1977: *Atmospheric Science: An Introductory Survey Second Edition*. Elsevier, 467 pp.
- Yang, B., Y. Wang, and B. Wang, 2007: The effect of internally generated inner-core asymmetries on tropical cyclone intensity. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 1165–1188, doi:10.1175/JAS3971.1.
- Yano, J.-I., and K. Emanuel, 1991: An improved model of the equatorial troposphere and its coupling with the stratosphere. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 377–389, doi:10.1175/1520-0469(1991)048<0377:AIMOTE>2.0.CO;2.

渦ロスビー波 - 強度への影響

Yang et al. (2007) は 3 次元大気モデルと 2 次元軸対称モデルによる理想化した TC のシミュレーション比較から、

- 定常状態での TC では接線方向に顕著な渦ロスビー波が形成される。
- 軸対称モデルの最大強度より 3 次元モデルの最大強度は約 10 % 弱まっている。

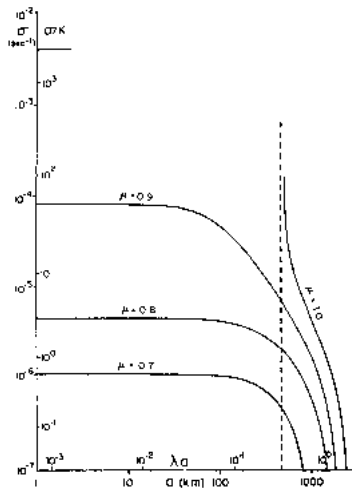
ということを示した。これは、軸対称の仮定によって約 10 % の強度の過大評価をしていることになる (Appendix あり)。



軸対称モデルと 3 次元モデルによる理想化実験で得られた最大強度の差。実線系が軸対称モデル、破線系が 3 次元モデル。上が中心気圧、下が接線最大風速の時間変化 (Yang et al., 2007)

第二種条件付不安定 (CISK)

- 軸対称渦が微小振幅であると仮定した線形不安定理論 (Charney and Eliassen, 1964).
- 渦中心付近のエクマン収束 \Rightarrow 水蒸気収束による壁雲での凝結 (非断熱加熱)



CISK の不安定モード
(Charney and Eliassen, 1964).

渦ロスビー波 - 構造への影響

Schubert et al. (1999) は非発散順圧渦度方程式から、多角形の壁雲が渦ロスビー波の不安定成長によって引き起こされることを示した。

基礎方程式系

f 面順圧非発散 2 次元非粘性流 (円筒座標; r, λ) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \zeta = 0,$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{r \partial \lambda}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}.$$

基本場

定常な軸対称傾度風 :

$$\left(f + \frac{\bar{v}}{r} \right) \bar{v} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r},$$

第二種条件付不安定 (CISK)

- Charney and Eliassen (1964); Ooyama (1964) によって提案された TC の発達メカニズム.
- 低気圧スケール ($O(100-1000 \text{ km})$) と積雲対流スケール ($O(10 \text{ km})$) の相互協調によって発達.

第二種条件付不安定 (CISK)

支配方程式系

動径方向には傾度風バランス, 鉛直方向には静力学バランス:

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad \alpha \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V^2}{r} + fV = \frac{m^2}{r^3} - \frac{f^2 r}{4},$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} r m^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} r u m^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{\rho} r w m^2)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} r \theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} r u \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{\rho} r w \theta)}{\partial z} = \frac{\bar{\rho} r \bar{\theta} Q}{c_p \bar{T}},$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} r u)}{\partial r} + \frac{\partial(\bar{\rho} r w)}{\partial z} = 0,$$

$$\bar{\rho} r u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \bar{\rho} r w = \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$m \equiv r v + \frac{f r^2}{2}.$$

第二種条件付不安定 (CISK)

運動方程式 (傾度風 + 静力学バランス, 軸対称)

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} = -u \cancel{\frac{\partial u}{\partial r}} - \frac{v}{r} \cancel{\frac{\partial u}{\partial \lambda}} - w \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} + \left(f + \frac{v}{r}\right)v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \cancel{F_r},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \left(f + \frac{v}{r}\right)u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \cancel{F_\lambda},$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} = -u \cancel{\frac{\partial w}{\partial r}} - \frac{v}{r} \cancel{\frac{\partial w}{\partial \lambda}} - w \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \cancel{F_z},$$

熱力学方程式 (軸対称)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - w \frac{\partial \theta}{\partial z} + \dot{Q},$$

連続の式 (非弾性, 軸対称)

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = -\frac{\partial(\rho r u)}{r \partial r} - \frac{\partial(\rho v)}{r \partial \lambda} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z},$$

状態方程式

$$\rho = \rho(p, T, q), \quad (T = T(p, \theta)),$$

水物質保存式 (水蒸気 q + 凝結物質 q_l)

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} = -u \frac{\partial q_x}{\partial r} - \frac{v}{r} \frac{\partial q_x}{\partial \lambda} - w \frac{\partial q_x}{\partial z} + \cancel{CP}.$$

第二種条件付不安定 (CISK)

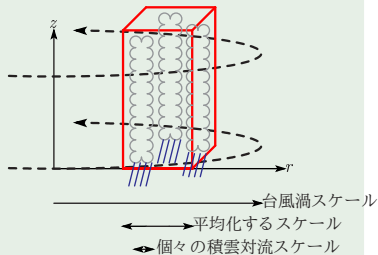
非断熱加熱の取扱い

- 移流過程による大気柱の鉛直積算水量の時間変化は降水として柱から瞬時に消失.
- 大気柱における対流スケールの水平風と水蒸気の間に関連は小さいと仮定.
- 対流スケールの降水による非断熱加熱のみが大気を中層で加熱.

水蒸気 (q) の収支:

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}_H q) - \frac{\partial (\rho w q)}{\partial z} - \frac{D \bar{\rho} q_l}{Dt}.$$

$D q_l / Dt$ は凝結,
 ρ は大気密度.



第二種条件付不安定 (CISK)

今, 各物理量 (ψ) が TC スケール (上線) と対流スケール (プライム) に分けられるとする:

$$\psi(r, z, t) = \bar{\psi}(r, z, t) + \psi'(r, z, t).$$

このとき, 対流スケールより充分大きく, TC スケールより小さい大気柱 (前図の赤線) にわたる水蒸気収支は

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{q}}{\partial t} dz = - \int_0^{\infty} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}_H \bar{q}) dz + \bar{\rho} (\bar{w} \bar{q})_{z=0} - I.$$

I は降水, $z = 0$ は摩擦境界層上端. 大気柱の水蒸気変化はなく (降水として消費された水蒸気はすぐさま境界層から供給される), 対流スケールの水平風と水蒸気の間に関連は小さいという仮定から, 上式は

$$I = - \int_0^{\infty} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}_H \bar{q}) dz + \bar{\rho} (\bar{w} \bar{q})_{z=0}.$$

ここで, $(\bar{w}' q')_{z=0} \approx 0$ である¹.

水蒸気混合比は飽和水蒸気混合比 (q_s) と飽和比 μ を用いて $q = \mu q_s$ とできるので,

$$I = - \int_0^{\infty} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}_H \mu \bar{q}_s) dz + \bar{\rho} (\bar{w} \mu \bar{q}_s)_{z=0}.$$

¹ただし, 原論文にはこの項がなぜ消すことができるのか記載されていない. 熱帯の対流における鉛直流の第一モードが対流圏中層にピークをもつと仮定. つまり, $z = 0$ で $w' \approx 0$ とすれば消えるがそれで正しいかは不明.

第二種条件付不安定 (CISK)

μ, \bar{q}_s が水平方向にほぼ変化しないと仮定すると、連続の式を用いて

$$\int_0^\infty \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}_H \mu \bar{q}_s) dz = - \int_0^\infty \mu \bar{q}_s \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}) dz = (\mu \bar{q}_s \bar{\rho} \bar{w})_{z=0} + \int_0^\infty \bar{\rho} \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \bar{q}_s) dz$$

よって I は

$$I = - \int_0^\infty \bar{\rho} \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \bar{q}_s) dz.$$

I の定義より、非断熱加熱 \dot{Q} [J/s] との関係は

$$\dot{Q} = L \frac{D(\bar{\rho} q_l)}{Dt} \left(\approx L \frac{D(\bar{\rho} \bar{q}_s)}{Dt} \right) \Rightarrow \int_0^\infty \dot{Q} dz = LI. \quad (3)$$

この関係では、鉛直積算した非断熱加熱量しかわからないので、モデルで必要となる鉛直方向の非断熱加熱分布 \dot{Q} そのものは上式を満たす何らかの仮定をおかなければならない。CISK では

$$\dot{Q} = -(LI) \left(\frac{1}{\bar{q}_{sg}} \frac{d\bar{q}_s}{dz} \right), \quad \bar{q}_{sg} = (\bar{q}_s)_{z=0}, \quad (\bar{q}_s)_{z=\infty} = 0.$$

これは、鉛直積算すると (3) になるのは明らか。

第二種条件付不安定 (CISK)

摩擦境界層として線形エクマン層を仮定し、2層モデルと結合する。

$$\frac{\partial(\bar{\rho}rm_1^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}ru_1m_1^2)}{\partial r} - \frac{g}{\Delta p}(\bar{\rho}_2rw_2m_2^2) = 0,$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}rm_3^2)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}ru_3m_3^2)}{\partial r} + \frac{g}{\Delta p}(\bar{\rho}_2rw_2m_2^2 - \bar{\rho}_4rw_4m_4^2) = 0,$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}r\theta_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}ru_1\theta_1)}{\partial r} - \frac{g}{\Delta p}(\bar{\rho}rw_2\theta_2) = \frac{\bar{\rho}_1r\bar{\theta}_1Q_1}{c_p\bar{T}_1},$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}r\theta_3)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}ru_3\theta_3)}{\partial r} + \frac{g}{\Delta p}(\bar{\rho}rw_2\theta_2 - \bar{\rho}rw_4\theta_4) = \frac{\bar{\rho}_3r\bar{\theta}_3Q_3}{c_p\bar{T}_3},$$

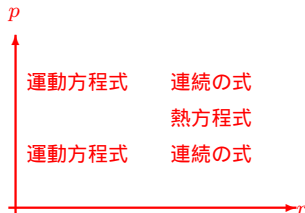
最下層が線形エクマン層の上端に相当する。
よって、TC 渦の渦度を ζ_g とすると

$$w_4 = A\zeta_g \sin 2\alpha, \quad (A, \alpha = \text{const.})$$

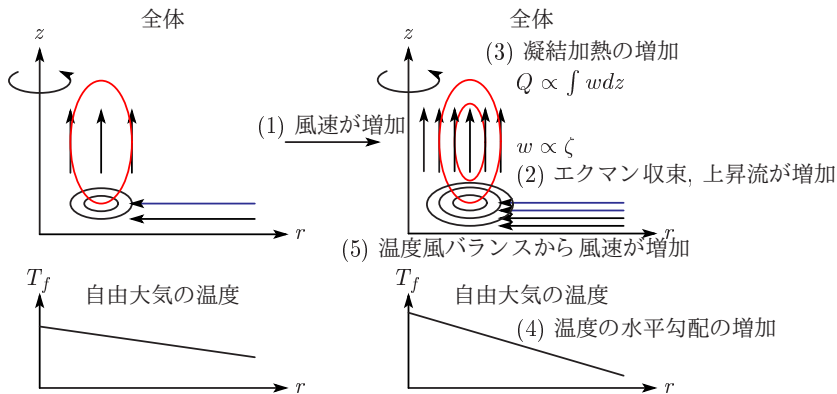
$$I = \mu \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial p} \Delta p (\bar{\rho}_2w_2 + \bar{\rho}_4w_4/2),$$

$$Q_1 = Q_3 = \frac{gL}{\bar{q}_{s4}} \frac{\partial \bar{q}_s}{\partial p} I \Rightarrow Q_1, Q_3 = Q(\zeta_g)$$

使用される 2 層モデル (Holton and Hakim (2012), 一部追記).



第二種条件付不安定 (CISK) まとめ



CISK による正のフィードバックまとめ.

CISK v.s. WISHE – 共通点 –

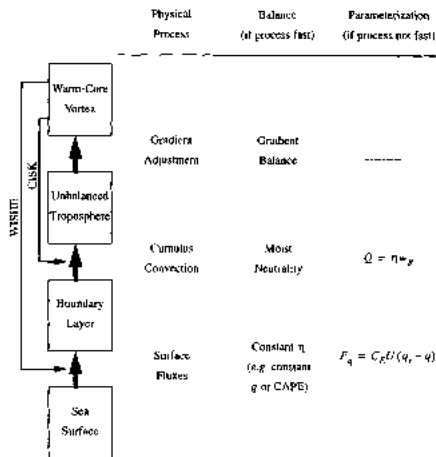
Craig and Gray (1996) は線形 CISK (と非線形 CISK) と WISHE の本質的な差を議論した。

基礎方程式と仮定の共通性

- 軸対称, 静力学, 傾度風バランス.
- 渦スケールと対流スケールの相互作用で発達.
- 対流スケールの物理現象を渦スケールの物理量で記載.

エネルギー変換プロセスの共通性

- 積雲対流による非断熱加熱供給.
- 非バランス状態の調節.
- (より発達した) 新しいバランス渦の確立.



CISK と WISHE におけるエネルギー変換とエネルギーソースの差 (Craig and Gray, 1996).

CISK v.s. WISHE —相違点—

CAPE の違いでみる「対流」の時間スケール

	CAPE	τ_c v.s. τ_v
CISK	$\neq 0$	$\tau_c \approx \tau_v$
WISHE	$= 0$	$\tau_c \ll \tau_v$

CISK (CAPE $\neq 0$) 対流の転倒時間 (τ_c) は TC の発達時間 (τ_v) と同程度.

⇒CAPE を消費することで対流の発達が引き起こされる.

WISHE (CAPE $= 0$) 対流の転倒時間は TC の発達時間に比べて一瞬.

⇒対流が常に自由大気を中立化するので CAPE は常にゼロ.

注意すべきこと：WISHE は CAPE = 0 であるが、対流が「発生せずに」発達するわけではない.

TC の発達は渦スケールと対流スケールの「スケール間」相互作用.
この「スケール」は空間スケール + 時間スケールであることに注意.

CISK v.s. WISHE —相違点—

エネルギーソースの違いでみる境界層の役割

CISK (エクマン層) 境界層収束によって生成される鉛直流が自由大気で非断熱加熱を生成.

⇒ システムにエネルギーを供給するのみ.

⇒ 指数関数的成長となる.

WISHE (混合層) 海面での熱交換過程を通してシステムに熱エネルギーを供給, 運動量交換過程を通して運動エネルギーを消費.

⇒ エネルギーの収支がバランスした状態で定常を実現.